RAS 2.1 Les propriétés des logarithmes

Partie 1 : Les formes logarithmiques et exponentielles

Le logarithme :

La fonction logarithmique ($y = \log_b x$) est la réciproque de la fonction exponentielle ($y = b^x$). En sachant que $10^3 = 1000$, on peut aussi exprimer cette relation en forme exponentielle sous la forme logarithmique : $3 = \log_{10} 1000$.

Exposant

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow 3 = \log_{10} 1000$$

Base

Ainsi, la valeur de $\log_{10} 7$ est la puissance à laquelle 10 est égal à 7.

$$\log_{10} 7 \approx 0{,}845 \text{ et } 10^{0{,}845} \approx 6{,}998$$

La plupart des calculatrices scientifiques ont 2 logarithmes, celui à base 10, noté log, et celui à base 'e', noté ln, que nous verrons en 12e année. Par contre, un logarithme peut emprunter pratiquement n'importe quelle base positive (sauf 0 ou 1). Nous allons voir plus tard une loi de changement de base pour évaluer ces logarithmes.

Exemple 1: Exprime sous forme logarithmique

a) $n = 4^x$

$x = \log_4 n$

b) $2^{-4} = 1/16$

$-4 = \log_2 \frac{1}{16}$

Exemple 2: Exprime sous forme exponentielle

a) $\log_5 (1/25) = -2$

$5^{-2} = \frac{1}{25}$

b) $\log_k t = x$

$k^x = t$

Exemple 3: Sans l'aide de la calculatrice, évalue.

a) $\log_2 64 = x$

$2^x = 64$

$2^x = 2^6$

$x = 6$

b) $\log (0{,}001) = x$

$10^x = 0{,}001$

$10^x = 10^{-3}$

$x = -3$

c) $\log_4 4^5 = x$

$4^x = 4^5$

$x = 5$

Devoir : Parcours B et C : Feuille de travail Omnimaths 12, nos 2, 6, 10, 14, 17, 21, 23, 30, 31, 34, 36, 40

Initialement, les logarithmes ont été créés pour manipuler les très grands nombres reliés à l'astronomie (à l'époque où il n'y avait pas de calculatrice scientifique, encore moins des téléphones intelligents!). De nos jours, on retrouve encore de nombreuses échelles sont des échelles logarithmiques, notamment l'échelle de Richter, pour les tremblements de terre, les décibels, pour l'intensité du son et le pH, pour la mesure de l'acidité d'un mélange.

Une échelle logarithmique a la propriété de ne pas avoir une distance constante entre deux unités. Graphiquement, on a une échelle qui ressemble à ceci :

Ainsi, on remarque que la distance entre 1 et 2 n'est pas la même qu'entre 2 et 3. Si la base est 10, la distance entre 1 et 3 est 10 fois plus grande qu'entre 1 et 2.

Exemple 4 : Le pH d'un mélange est relié à la concentration en ion H+ en mol/L, $[H+]$, par la relation :

$$pH = -\log([H+])$$

a) Détermine le pH d'un mélange ayant une concentration en ion H+ de 3,4 x 10^{-4} mol/L.

$pH = -\log(3{,}4 \times 10^{-4})$

$pH = 3{,}47$

b) Détermine la concentration en ion H+ d'un mélange ayant un pH de 8,1.

$8{,}1 = -\log H^+$

$-8{,}1 = \log(H^+)$

$H^+ = 10^{-8{,}1}$

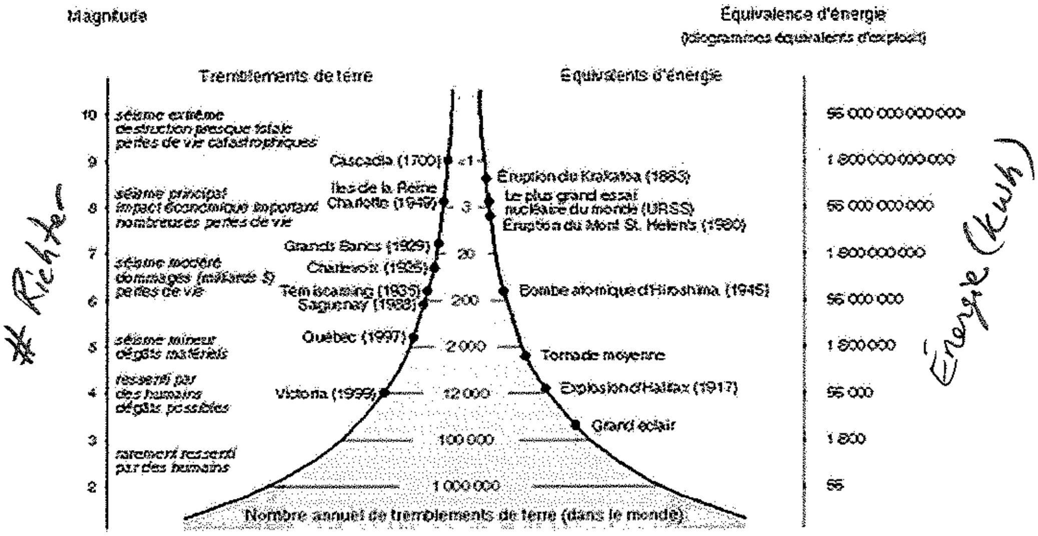
$H^+ = 8 \times 10^{-9}$

L'échelle de Richter :

L'échelle de Richter est l'une des échelles logarithmiques les plus connues. Elle sert à mesurer l'intensité d'un tremblement de terre. Voici quelques effets ressentis selon le nombre de Richter associé à un tremblement de terre :

Nombre de Richter	1	2	3	4	5	6	7	8
Intensité	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
Effet	Détectable seulement sur sismographe	Les objets suspendus se balancent.	Perceptible par l'être humain	Le verre se brise, les édifices se balancent.	Les meubles s'écroulent.	Les maisons de bois sont endommagées.	Les édifices s'écroulent.	Les dommages sont catastrophiques.

La figure ci-dessous présente la fréquence annuelle mondiale estimée de tremblements de terre selon chaque nombre de Richter. On a aussi indiqué divers évènements importants dans l'histoire. (Source : http://www.seismescanada.rncan.gc.ca/info-gen/magfreq-fra.php)



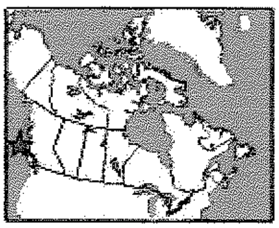
Exemple 5 : La relation entre le nombre de Richter, R, et l'énergie libérée par un tremblement de terre, E, en kilowattheures (kWh), est modélisée par la relation : $R = 0{,}67\log E + 1{,}17$.

a) Le 26 décembre 2004, l'un des tsunamis les plus dévastateurs a été causé par un tremblement de terre qui a eu lieu dans l'Océan Indien. On estime que l'énergie déployée était d'environ $5{,}55 \times 10^{11}$kWh, soit l'équivalent de 23 000 fois la bombe nucléaire de Nagasaki. Quel était son nombre de Richter ?

$R = 0{,}67 \log 5{,}55 \times 10^{11} + 1{,}17$

$\boxed{R = 9{,}03}$

b) L'un des tremblements de terre les plus importants de 2013 au Canada a été enregistré le 3 septembre à environ 200 km de Bella Bella, C.-B. (voir l'étoile sur la carte). Son nombre de Richter était de 6,2. Il n'a pas été ressenti et aucun tsunami ne l'a suivi. Quelle était l'énergie déployée par ce tremblement de terre?



$6{,}2 = 0{,}67 \log E + 1{,}17$

$5{,}03 = 0{,}67 \log E$

$7{,}51 = \log E$

$E = 10^{7{,}51}$

$\boxed{E = 3{,}24 \times 10^{7} \text{ kwh}}$

Exemple 6: (Parcours C) R = log I, où R est le nombre sur l'échelle de Richter et I, l'intensité du tremblement.
En 1999, en Turquie, un tremblement de terre a atteint 7,4 sur l'échelle de Richter. En 1996, à Seattle, un tremblement de terre a atteint 5,3 sur cette même échelle. Combien de fois le tremblement de terre de Turquie était-il plus intense que celui de Seattle ?

$7{,}4 = \log I$ $\qquad\qquad$ $5{,}3 = \log I$

$I_{Turquie} = 10^{7{,}4}$ $\qquad\qquad$ $I_{Seattle} = 10^{5{,}3}$

$$\frac{I_T}{I_S} = \frac{10^{7{,}4}}{10^{5{,}3}} = 10^{2{,}1} = \underline{\underline{125 \text{ fois}}}$$

Devoir : Parcours B : Feuille de travail 2, nos 1 à 6

Parcours C : Feuille de travail 2, nos 1 à 6; Feuille de travail 1, nos 46ad, 47a, 50c

Partie 2 : Quelques propriétés des logarithmes

Soit B > 0, B ≠ 1, x ≥ 1, on a les propriétés suivantes :

- $\log_B 1 = 0$
- $\log_B B = 1$
- $\log_B B^x = x$
- $\log_B x^y = y \log_B x$
- $\log_B x = \frac{\log x}{\log B}$

Toutes ces propriétés peuvent se démontrer facilement en apportant les relations sous la forme exponentielle et utiliser les lois des exposants.

Exemple 1 : Écris sous la forme $n \log_c m$.

a) $\log \sqrt[3]{x^2} = \log x^{2/3}$

$= \frac{2}{3} \log x$

b) $\log_2 \frac{1}{b^5} = \log_2 b^{-5}$

$= -5 \log_2 b$

Exemple 2 : Écris sous un seul logarithme (de la forme $\log_c m^n$.

a) $\log 3 + \log 3 + \log 3 = 3 \log 3$

$= \log 3^3$

b) $3\log 16 - \log 4 = 3 \log 4^2 - \log 4$

$= 6 \log 4 - \log 4$

$= 5 \log 4$

$= \log 4^5$

Exemple 3 : Évalue le logarithme suivant au centième près.

$\log_7 14 = \frac{\log 14}{\log 7} = 1{,}36$

Exemple 4 : En sachant que $\log_c 2 = 0{,}69$ et que $\log_c 3 = 1{,}10$,

a) évalue $\log_c 4 + \log_c 27 - \log_2 3$ b) détermine entre quels entiers se trouve c.

$$= \log_c 2^2 + \log_c 3^3 - \log_2 3$$

$$= 2\log_c 2 + 3\log_c 3 - \frac{\log_c 3}{\log_c 2}$$

$$= 2(0{,}69) + 3(1{,}10) - \frac{1{,}10}{0{,}69}$$

$$= \boxed{3{,}09}$$

Entre 2 et 3, car

$\log_c 2 = 0{,}69$

$\Rightarrow c^{0{,}69} = 2 \Rightarrow c \approx 2{,}7$

et

$\log_c 3 = 1{,}10$

$\Rightarrow c^{1{,}10} = 3 \Rightarrow c \approx 2{,}7$

Devoir : Parcours B et C : Visions pages 372, nos 1abe, 2abdefghi, 3aceh, 4abdfhk