RAS 3.8 Résolution d'inéquation exponentielles

Exemple 1 : Résous

a) $3(4)^{2x} < 192$

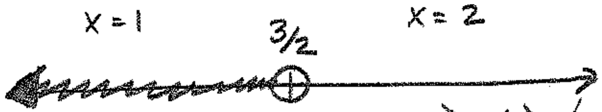
$$\frac{\cancel{3}(4)^{2x}}{\cancel{3}} = \frac{192}{3}$$

$$4^{2x} = 64$$

$$4^{2x} = 4^3$$

$$2x = 3$$

$$x = 3/2$$



$3(4)^{2(1)} < 192$

$48 < 192$

$\cancel{3(4)^{2(2)} < 192}$

$\cancel{768 < 192}$

$$\boxed{x \in \left]-\infty, 3/2\right[}$$

b) $3^x \geq 2^{x+1}$

$$3^x = 2^{x+1}$$

$$\log 3^x = \log 2^{x+1}$$

$$x \log 3 = (x+1) \log 2$$

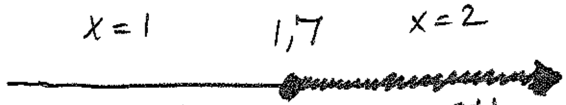
$$x \log 3 = x \log 2 + \log 2$$

$$x \log 3 - x \log 2 = \log 2$$

$$x(\log 3 - \log 2) = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2}$$

$$x \approx 1,7$$



$\cancel{3^1 \geq 2^{1+1}}$

$\cancel{3 \geq 4}$

$3^2 \geq 2^{2+1}$

$9 \geq 8$ ✓

$$\boxed{x \in [1,7, \infty[}$$

ou

$$\boxed{x \in \left[\frac{\log 2}{\log 3 - \log 2}, \infty\right[}$$

c) (Parcours C) $2^{2x} - 6(2^x) + 8 < 0$

$2^{2x} - 6(2^x) + 8 = 0$

$(2^x)^2 - 6(2^x) + 8 = 0$

Posons $y = 2^x$

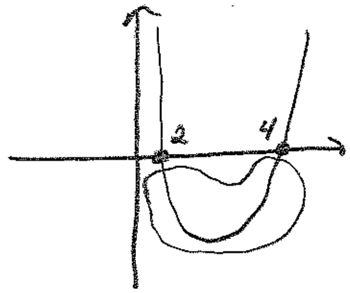
$y^2 - 6y + 8 = 0 \longrightarrow y^2 - 6y + 8 < 0$

$y^2 - 2y - 4y + 8 = 0$ $\quad -2 \times -4 = 8$, $\quad -2 + -4 = -6$

$y(y-2) - 4(y-2) = 0$

$(y-2)(y-4) = 0$

$y = 2$ et $y = 4$



$y > 2$ et $y < 4$

$2^x > 2^1$ $\quad 2^x < 4$

$2^x < 2^2$

$x > 1$ $\quad x < 2$

$\boxed{x \in]1, 2[}$

Devoir : Parcours B : 1abcdef, 2

Parcours C : 1abcdefghi, 2

1. Résous.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \geq 28$ b) $13^{\frac{2-x}{4}} > 2$ c) $5(2^x) < 85$

d) $3^{2x} < 2^{x-1}$ e) $2^x \geq 3^x$ f) $10^x > 2^{x-3}$

g) $3(9^{2x}) + 9 \leq 28(9^x)$ h) $25^x - 23(5^x) - 50 > 0$

i) $2^{2x+3} - 6(2^x) + 1 < 0$

2. On investit un certain montant à un taux d'intérêt annuel de 4 % composé annuellement. Trois ans plus tard, dans un compte séparé, on investit le même montant à un taux d'intérêt annuel de 6 % composé annuellement. Pendant combien d'années le premier placement aura une valeur supérieure au second ?

#1 a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \geq 28$

"À toi de jouer!" (Corrigé)

$(x+2)\log\frac{1}{2} = \log 28$

$x\log\frac{1}{2} + 2\log\frac{1}{2} = \log 28$

$x\log\frac{1}{2} = \log 28 - 2\log\frac{1}{2}$

$x = \dfrac{\log 28 - 2\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{2}}$

$x \approx -6{,}81$

$x=-7$ ... -6.81 ... $x=-6$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-7+2} \geq 28$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6+2} \geq 28$

$32 \geq 28$ $\quad$ $16 \geq 28$

✓ $\quad$ ✗

$\left]-\infty, \dfrac{\log 28 - 2\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{2}}\right]$

b) $13^{\frac{2-x}{4}} > 2$

(1)

$13^{\frac{2-x}{4}} = 2$

$\log 13^{\frac{2-x}{4}} = \log 2$

$\left(\frac{2-x}{4}\right)\log 13)^{\times 4} = (\log 2)^{\times 4}$

$(2-x)\log 13 = 4\log 2$

$2\log 13 - x\log 13 = 4\log 2$

$2\log 13 - 4\log 2 = x\log 13$

$x = \dfrac{2\log 13 - 4\log 2}{\log 13}$

$x \approx 0{,}91$

$x=0$ ... $0{,}91$ ... $x=1$

$13^{\frac{2-0}{4}} > 2$ $\quad$ $13^{\frac{2-1}{4}} > 2$

$\sqrt{13} > 2$ $\quad$ $\sqrt[4]{13} > 2$

$3{,}60 > 2$ $\quad$ $1{,}89 > 2$

✓

$\left]-\infty, \dfrac{2\log 13 - 4\log 2}{\log 13}\right[$

c) $5(2^x) < 85$

$\dfrac{5(2^x)}{5} = \dfrac{85}{5}$

$2^x = 17$

$x\log 2 = \log 17$

$x = \dfrac{\log 17}{\log 2} \Rightarrow x \approx 4{,}08$

$x=3$ ... $4{,}08$ ... $x=5$

$5(2^3) < 85$ $\quad$ $5(2^5) < 85$

$40 < 85$ $\quad$ $5(32) < 85$

✓ $\quad$ $160 < 85$

✗

$\left]-\infty, \dfrac{\log 17}{\log 2}\right[$.

d) $3^{2x} < 2^{x-1}$

$3^{2x} = 2^{x-1}$

$\log 3^{2x} = \log 2^{x-1}$

$2x \log 3 = (x-1) \log 2$

$2x \log 3 = x \log 2 - \log 2$

$\log 2 = x \log 2 - 2x \log 3$

$\log 2 = x (\log 2 - 2 \log 3)$

$x = \dfrac{\log 2}{\log 2 - 2 \log 3}$

$x \approx -0{,}46$

$x=-1 \quad -0{,}46 \quad x=0$

$3^{2(-1)} < 2^{-1-1}$ $\qquad$ $3^{2(0)} < 2^{0-1}$

$3^{-2} < 2^{-2}$ $\qquad$ $1 < 1/2$

$\frac{1}{9} < \frac{1}{4}$ $\qquad$ ✗

✓

$]-\infty, \dfrac{\log 2}{\log 2 - 2\log 3}[$

e) $2^x \geq 3^x$

$2^x = 3^x$

$\log 2^x = \log 3^x$

$x \log 2 = x \log 3$

$x \log 2 - x \log 3 = 0$

$x (\log 2 - \log 3) = 0$

$x = 0$

$x=-1 \quad 0 \quad x=1$

$2^{-1} \geq 3^{-1}$ $\qquad$ $2^{1} \geq 3^{1}$

$\frac{1}{2} \geq 1/3$ $\qquad$ ✗

✓

$]-\infty, 0]$

f) $10^x > 2^{x-3}$

$10^x = 2^{x-3}$

$\log 10^x = \log 2^{x-3}$

$x \log 10 = (x-3) \log 2$

$x \log 10 = x \log 2 - 3 \log 2$

$3 \log 2 = x \log 2 - x \log 10$

$3 \log 2 = x (\log 2 - \log 10)$

$$x = \frac{3 \log 2}{\log 2 - \log 10}$$

$x \approx -1,29$

$x = -2$ $\quad -1,29 \quad$ $x = 0$

$x = -2$	$x = 0$
$10^{-2} > 2^{-2-3}$	$10^0 > 2^{0-3}$
$\frac{1}{100} > \frac{1}{32}$	$1 > \frac{1}{8}$
X	✓

$\left] \frac{3 \log 2}{\log 2 - \log 10}, +\infty \right[$

g) $3(9^{2x}) + 9 \leq 28(9^x)$

soit $y = 9^x$

$3y^2 + 9 \leq 28y$

$3y^2 - 28y + 9 \leq 0$

$3y^2 - 27y - y + 9 \leq 0$

$3y(y-9) - 1(y-9) \leq 0$

$(y-9)(3y-1) \leq 0$

$y = 9 \quad y = 1/3$

		$1/3$		9	
$y-9$	$-$		$-$	0	$+$
$3y-1$	$-$	0	$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$\frac{1}{3} \leq y \leq 9$

$9^x \geq 1/3 \qquad 9^x \leq 9$

$3^{2x} = 1/3$

$3^{2x} = 3^{-1}$

$2x = -1$

$x = -1/2$

$x \geq -1/2 \wedge x \leq 1$

$\left[-\frac{1}{2}, 1 \right]$

$x = -1 \quad -1/2 \quad x = 0$

$x = -1$	$x = 0$
$9^{-1} \geq 1/3$	$9^0 \geq 1/3$
$1/9 \geq 1/3$ X	$1 \geq 1/3$ ✓

h) $25^x - 23(5^x) - 50 > 0$

$5^{2x} - 23(5^x) - 50 > 0$

Soit $y = 5^x$

$y^2 - 23y - 50 > 0$

$y^2 - 25y + 2y - 50 > 0$

$y(y-25) + 2(y-25) > 0$

$(y-25)(y+2) > 0$

$y = 25$ $\quad y = -2$

		-2		25	
$y-25$	$-$		$-$	0	$+$
$y+2$	$-$	0	$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$y < -2 \cup y > 25$

$5^x < -2 \cup 5^x > 25$

$5^x = -2$

$x \log 5 = \underline{\log -2}$

erreur mathématique

Aucune solution

Mais 5^x est toujours plus grand que -2, donc aucune solution.

① $x = 2$

$x = 1 \quad 2 \quad x = 3$

$5^1 > 25 \quad 5^3 > 2$

X $\quad 125 > 2$ ✓

$]3, \infty[$

$]3, \infty[$

i) $2^{2x+3} - 6(2^x) + 1 < 0$

$2^{2x} \cdot 2^3 - 6(2^x) + 1 < 0$

$8(2^x)^2 - 6(2^x) + 1 < 0$

$y = 2^x$

$8y^2 - 6y + 1 < 0$

$8y^2 - 4y - 2y + 1 < 0$

$4y(2y-1) - 1(2y-1) < 0$

$(2y-1)(4y-1) < 0$

$y = 1/2 \quad y = 1/4$

		$1/4$		$1/2$	
$2y-1$	$-$		$-$	0	$+$
$4y-1$	$-$	0	$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$\frac{1}{4} \leq y \leq 1/2$

$2^x \geq 1/4$ et $2^x \leq 1/2$

$[0, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$

$2^x = 1/4$

$2^x = 2^{-2}$

$x = -2$

$x = -3 \quad x = 0$

$2^{-3} \geq 1/4 \quad 2^0 > 1/4$

X $\quad 1 \geq 1/4$

$2^x = 1/2$

$x = -1$

$x = -2 \quad x = 0$

$2^{-2} \leq 1/2 \quad 2^0 \leq 1/2$

$1/4 \leq 1/2$ ✓ X

$[-1, 0]$

2. $M_1 = C(1,04)^x \qquad M_2 = C(1,06)^{x-3}$

$$\cancel{C}(1,04)^x > \cancel{C}(1,06)^{x-3}$$
$$(1,04)^x > (1,06)^{x-3}$$

① $1,04^x = (1,06)^{x-3}$

$$x\log(1,04) = (x-3)\log(1,06)$$
$$x\log 1,04 = x\log 1,06 - 3\log 1.06$$
$$3\log 1,06 = x\log 1.06 - x\log 1.04$$
$$3\log 1.06 = x(\log 1.06 - \log 1.04)$$
$$x = \frac{3\log 1.06}{\log 1.06 - \log 1.04}$$

$x \approx 9,17$

$x=0 \qquad x=9 \qquad 9,17 \qquad x=10$

$1,04^9 > 1,06^{9-3} \qquad 1,04^{10} > 1,06^{10-3}$

$1,4233 > 1,4185$ ✓ $\qquad 1,4802 > 1,5036$ ✗

$$\left[0, \frac{3\log 1.06}{\log 1.06 - \log 1.04}\right[$$ ✓

Pendant $\underline{\underline{10}}$ ans.

(lorsque l'intérêt sera ajouté lors de la 10e année).