RAS 3.8 Résolurion d'équations et d'inéquations quadratiques

Résolution d'équations quadratiques

$\left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Rappel : Soit la fonction $f(x) = 6x^2 + 8x - 8$.

a) Détermine les coordonnées du sommet de cette fonction

$f(x) = 6\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) - 8$

$f(x) = 6\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{24}{9} - 8$

$f(x) = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{24}{9} - \frac{72}{9}$

$f(x) = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{32}{3}$

Sommet : $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{32}{3}\right)$

b) Détermine les racines.

$0 = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{32}{3}$

$\frac{32}{3} = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)^2$

$\frac{32}{18} = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2$

$\sqrt{\frac{16}{9}} = \sqrt{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2}$

$\pm\frac{4}{3} = x + \frac{2}{3}$

$x = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$ $\quad x = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3}$

$x = \frac{2}{3}$ $\quad x = -2$

Découvrons ...

$\left(\frac{b}{a}\times\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Comparons simultanément la transformation, de la forme générale à la forme canonique, des deux fonctions suivantes.

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x \quad\right) + c$

$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$

$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

$\Rightarrow \boxed{\text{Sommet : } \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)}$

Maintenant, trouvons leurs racines.

$0 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

$\frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

$\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$

$\Rightarrow \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x + \frac{b}{2a}$

$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Nous pouvons trouver les coordonnées du sommet ainsi que les racines d'une fonction quadratique écrite sous sa forme générale à l'aide des formules suivantes.

<u>Sommet</u>

$$(h,k)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

<u>Racines</u>

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Exemple 1 : Trouve les racines et le sommet de chaque fonction quadratique.

a) $y=2x^2-11x+5$

Sommet : $\left(\frac{-(-11)}{2(2)},\frac{4(2)(5)-(-11)^2}{4(2)}\right)$

$\boxed{\left(\frac{11}{4},\frac{-81}{8}\right)}$

racine : $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4(2)(5)}}{2(2)}$

$x=\frac{11\pm\sqrt{81}}{4}$

$x=\frac{11\pm 9}{4}$

$\boxed{x=5 \text{ et } x=\frac{1}{2}}$

b) $y=5x^2-8x-5$

Sommet : $\left(\frac{-(-8)}{2(5)},\frac{4(5)(-5)-(-8)^2}{4(5)}\right)$

$\boxed{\left(\frac{4}{5},\frac{-82}{5}\right)}$

racine : $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(5)(-5)}}{2(5)}$

$x=\frac{8\pm\sqrt{164}}{10}$

$\sqrt{164}$
$\sqrt{4\times41}$
$2\sqrt{41}$

$x=\frac{8\pm2\sqrt{41}}{10}$

$x=\frac{4\pm\sqrt{41}}{5}$

$\boxed{x=\frac{4+\sqrt{41}}{5} \text{ et } x=\frac{4-\sqrt{41}}{5}}$

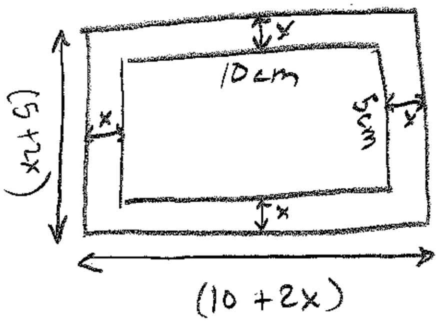
À toi de jouer!

Résous.

a) $\mathbf{a^2-8a+16=0}$	b) $\mathbf{w^2+30=9+10w}$	c) $\mathbf{-3x^2+4x+1=0}$
d) $\mathbf{x(4-x)=0}$	e) $\mathbf{2t^2+11t+5=0}$	f) $\mathbf{4=m^2-2m}$
g) $\mathbf{10y^2-16y=-6}$	h) $\mathbf{3(z^2+1)=-4z}$	i) $\mathbf{9x^2-6x+1=0}$
j) $\mathbf{4t^2=12t-9}$	k) $\mathbf{x^2-2x-11=4}$	l) $\mathbf{x^2+x-1=0}$
m) $\mathbf{7x^2-2x-2=0}$	n) $\mathbf{(x+1)^2=4}$	o) $\mathbf{5t^2-20t=0}$
p) $\mathbf{4x^2+16x+15=0}$	q) $\mathbf{2x^2=3-8x}$	r) $\mathbf{4x=5-4x^2}$

Exemple 2 :

Avant d'encadrer une photographie rectangulaire de 10 cm sur 5 cm, on doit l'entourer d'une bordure. La largeur de la bordure doit être la même de chaque côté de la photographie. L'aire de la bordure doit mesure le double de l'aire de la photographie. Quelles sont les dimensions du cadre ?



Aire photographie = $(10 \times 5) = 50$

Aire bordure = $2(50) = 100$

Aire totale = 150

$$(5+2x)(10+2x) = 150$$

$$50 + 10x + 20x + 4x^2 = 150$$

$$\frac{4x^2 + 30x - 100}{2} = \frac{0}{2}$$

$$2x^2 + 15x - 50 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{(15)^2 - 4(2)(-50)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{625}}{4}$$

$$x = \frac{-15 \pm 25}{4}$$

$$x = \cancel{-\frac{40}{4} = -10} \quad \text{et} \quad \boxed{x = 2,5}$$

~~une mesure négative~~

Largeur = $(5 + 2(2,5))$
$= 10$ cm

et

longueur = $(10 + 2(2,5))$
$= 15$ cm

Devoir (Parcours B et C) : Feuille de travail # 1

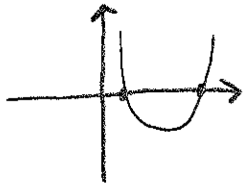
p.138-139 (Vision) #7, 9, 11abc, 13, 14

Résolution d'inéquations quadratiques

Lorsque l'on résout une équation quadratique, $ax^2 + bx + c = 0$, on trouve toutes les valeurs de x lorsque $y = 0$.

Si on résout l'inéquation quadratique, $ax^2 + bx + c > 0$, on cherche toutes les valeurs de x qui donne une fonction positive.

De même, si on résout l'inéquation quadratique, $ax^2 + bx + c < 0$, on cherche toutes les valeurs de x qui donne une fonction négative.



Exemple 1

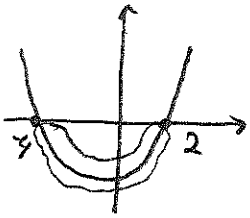
Résous.

$a \oplus \Rightarrow \cup$

a) $x^2 + 2x - 8 < 0$

$4 \times -2 = -8$

$4 + -2 = 2$



$x^2 + 4x - 2x - 8 = 0$

$x(x+4) - 2(x+4) = 0$

$(x+4)(x-2) = 0$

$x = -4$ et $x = 2$

	-4		2	
+	0	−	0	+

$\boxed{x \in]-4, 2[}$

b) $-x^2 + 4x - 2 \geq 0$

$x^2 - 4x + 2 \leq 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$

$\sqrt{8}$
$\sqrt{4 \times 2}$
$2\sqrt{2}$

$x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$x = 2 \pm \sqrt{2}$

$\boxed{x \in [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]}$

c) $9x^2 - 12x + 4 < 0$

$-6 \times -6 = 36$

$-6 + -6 = -12$

$9x^2 - 6x - 6x + 4 = 0$

$3x(3x-2) - 2(3x-2) = 0$

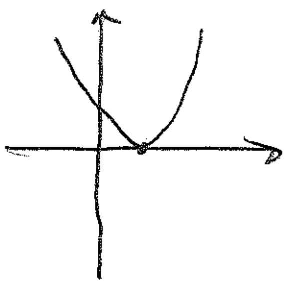
$(3x-2)(3x-12) = 0$

$\sqrt{(3x-2)^2} = \sqrt{0}$

$3x - 2 = 0$

$3x = 2$

$x = 2/3$

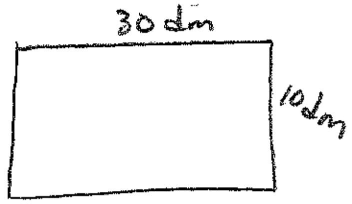


	2/3	
+	0	+

$\boxed{x \in \{\varnothing\}}$

Exemple 2

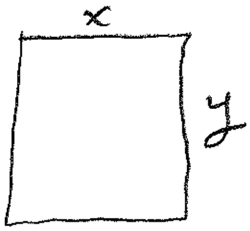
Une entreprise conçoit et fabrique des fenêtres. L'une des fenêtres, de forme rectangulaire, mesure 30 dm par 10 dm. Un promoteur immobilier est intéressé par ce modèle pour l'un de ses projets, mais il aimerait que la fenêtre ait une aire d'au moins 350 dm^2. La directrice de l'entreprise se pose alors une question : Est-il possible de concevoir une fenêtre ayant une aire d'au moins 350 dm^2 tout en préservant le périmètre de ce modèle ? Elle se dit, dans ce cas, il faudrait augmenter sa largeur et diminuer sa hauteur.
Soit x la largeur (en dm) de la nouvelle fenêtre. Quelles valeurs de x l'entreprise pourrait-elle choisir afin de satisfaire aux exigences du promoteur ?



$P = 2(30) + 2(10)$

$P = 60 + 20$

$P = 80$ dm



$xy > 350$

$2x + 2y = 80$

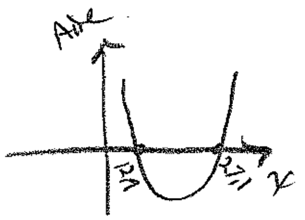
$\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} = \frac{80 - 2x}{2}$

$y = 40 - x$

$x(40 - x) > 350$

$40x - x^2 > 350$

$0 > x^2 - 40x + 350$



$x^2 - 40x + 350 < 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4(1)(350)}}{2(1)}$

$x = \frac{40 \pm \sqrt{200}}{2}$

$x = \frac{40 \pm 14{,}14}{2}$

$x = 27{,}1$ dm et $x = 12{,}9$ dm

Oui, les valeurs de x (la largeur) qui satisfait le promoteur sont entre 12,9 dm et 27,1 dm.

Devoir (Parcours B et C): p.147-151 (Visions) # 3cdehi, 5, 7, 13abc
Feuille de travail #2