Partie 1 : Les équations valeur absolue

Rappel : La définition d'une fonction valeur absolue est $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$.

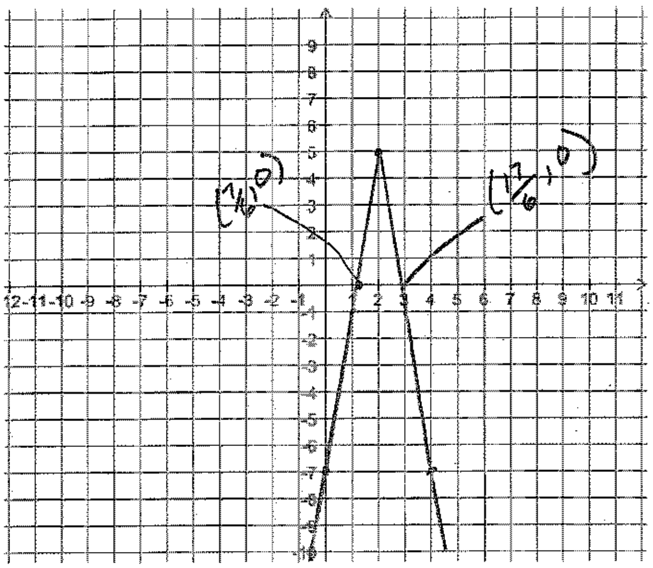
Introduction : $y = -2|-3x + 6| + 5$

$y = a|x-h|+k$

$y = -2|-3(x-2)|+5$

$y = -2|-3||x-2|+5$

$y = -6|x-2|+5$



ord. à l'origine $(x=0)$

$y = -6|0-2|+5$

$y = -6|-2|+5$

$y = 7$

abs. à l'origine $(y=0)$

$0 = -6|x-2|+5$

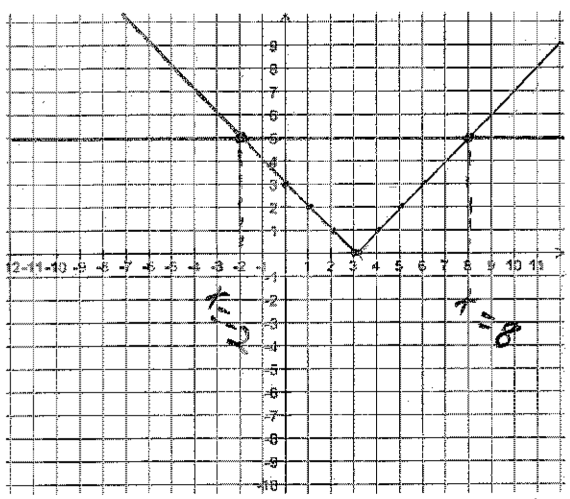
$\frac{-5}{-6} = \frac{\cancel{-6}|x-2|}{\cancel{-6}}$

$\frac{5}{6} = |x-2|$

$x-2<0$	$x-2\geq 0$
$\frac{5}{6} = x-2$	$\frac{5}{6} = -(x-2)$
$\frac{5}{6}+2 = x$	$\frac{5}{6} = -x+2$
$\frac{5}{6}+\frac{12}{6} = x$	$x = 2-\frac{5}{6}$
$\frac{17}{6} = x$	$x = \frac{12}{6}-\frac{5}{6}$
	$x = \frac{7}{6}$

Exemple 1 : Résous $|x-3| = 5$

Solution 1 : Utilisons l'algèbre	
1. Éliminer la valeur absolue en appliquant la définition de la valeur absolue et compléter la résolution de l'équation ou des équations.	$|x-3| = 5$ Nombre critique 3 $x-3<0$; $x<3$ | $x-3 \geq 0$; $x \geq 3$ $-(x-3)=5$; $-x+3=5$; $-x=2$; $x=-2$ | $x-3=5$; $x=8$
2. Vérifie les solutions	$|-2-3|=5$; $|-5|=5$; $5=5$ ✓ | $|8-3|=5$; $|5|=5$; $5=5$ ✓
3. Énoncer l'ensemble-solution.	$x=-2$ ou $x=8$

Solution 2 : Résolvons graphiquement	
$y = |x-3|$ $y=5$ $x = ?$ quand $y=5$	

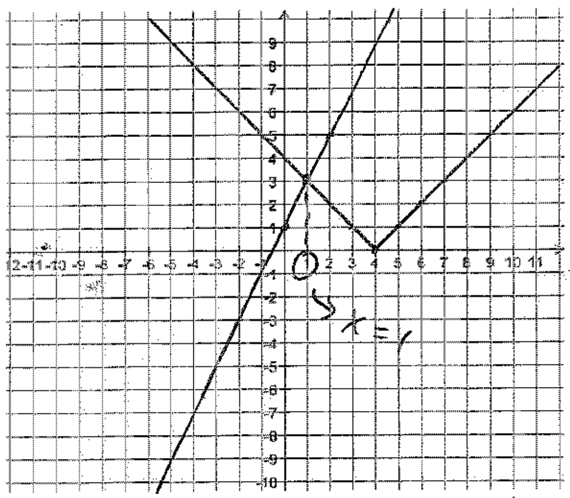
Exemple 2 : Résous $|x-4| = 2x+1$

Solution 1 : Utilisons l'algèbre		
1. Éliminer la valeur absolue en appliquant la définition de la valeur absolue et compléter la résolution de l'équation ou des équations.	$-$ $x-4<0$ $x<4$ $-(x-4)=2x+1$ $-x+4=2x+1$ $4-1=3x$ $3=3x$ $1=x$	4 $+$ $x-4 \geq 0$ $x \geq 4$ $x-4=2x+1$ $-4-1=x$ $-5=x$
2. Vérifie les solutions	$\|1-4\|=2(1)+1$ $\|-3\|=3$ $3=3$ ✓	$\|-5-4\|=2(-5$ $\| \quad \|=$
3. Énoncer l'ensemble-solution.	$x=1$	

Solution 2 : Résolvons graphiquement

$y=|x-4|$

$y=2x+1$



Exemple 3 (Parcours C) : Résous $|2x+5|+1=2x+6$

Solution 1 : Utilisons l'algèbre	
1. Éliminer la valeur absolue en appliquant la définition de la valeur absolue et compléter la résolution de l'équation ou des équations.	Nombre critique $-\frac{5}{2}$ $2x+5<0$; $x<-\frac{5}{2}$ | $2x+5\geq 0$; $x\geq -\frac{5}{2}$ $-(2x+5)+1=2x+6$ $-2x-5+1=2x+6$ $-4-6=4x$ $-10=4x$ $-\frac{10}{4}=x$ $-\frac{5}{2}=x$ — $2x+5+1=2x+6$ $2x+6=2x+6$ $6=6$ Vrai, donc tout l'intervalle fonctionne $x\in[-\frac{5}{2},\infty[$
2. Vérifie les solutions	$\lvert 2(3)+5\rvert+1=2(3)+6$ $\lvert 11\rvert+1=6+6$ $12=12$
3. Énoncer l'ensemble-solution.	$x\in[-\frac{5}{2},\infty[$

Solution 2 : Résolvons graphiquement

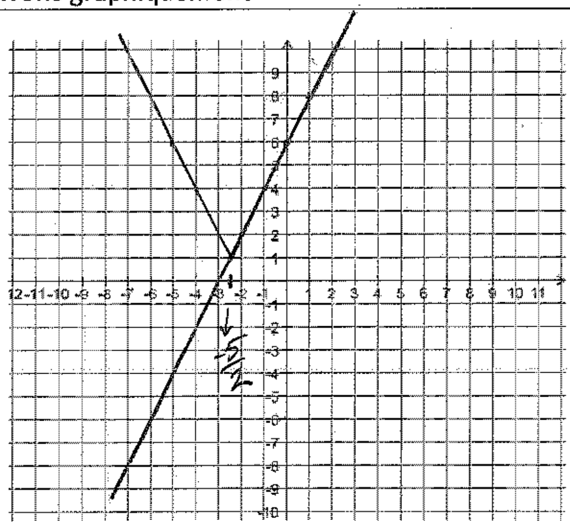
$y=|2x+5|+1$

$y=2x+6$

$y=|2(x+\frac{5}{2})|+1$

$y=|2|\,|x+\frac{5}{2}|+1$

$y=2\,|x+\frac{5}{2}|+1$

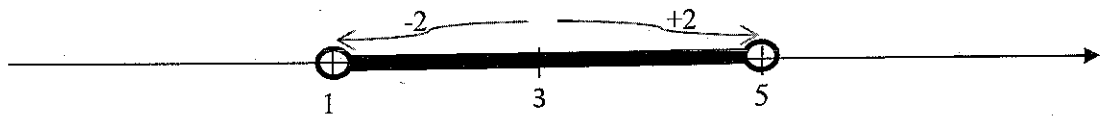


Devoir : Parcours B : Visions pages 30-34, nos 6abcg, 8b, 23b; Feuille de travail 1, no 1abc

Parcours C : Visions pages 30-34, nos 6abc, 8ab, 23b; Feuille de travail 1, nos 1cd, 2ab

Partie 2 : Les inéquations valeur absolue

Rappel : L'expression $|x-a|$ représente la distance sur la droite numérique entre les nombres x et a. Ainsi, la solution de l'inéquation $|x-3|<2$ représente tous les nombres x qui sont à moins de 2 unités de 3. Graphiquement, la solution est représentée ci-dessous.



Pour résoudre une inéquation valeur absolue, la méthode est similaire à celle pour résoudre les équations du même type.

Il est possible de résoudre des équations et des inéquations en combinant une approche algébrique conjointement avec la représentation graphique de la situation.

Exemple 4 : Trouver les valeurs de x lorsque $y \geq 5$ dans l'équation $y = 2|x-1|-4$.

$x = ?$ lorsque $y \geq 5$

Méthode graphique :

$2|x-1|-4 = 5$

$\cancel{2|x-1| = \frac{9}{2}}$

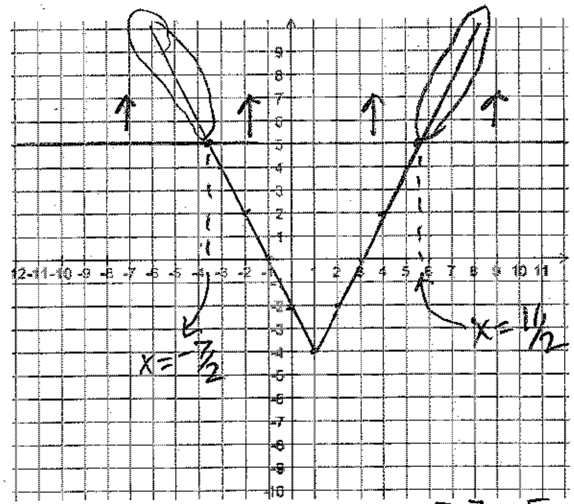
$|x-1| = \frac{9}{2}$

$x-1 = \frac{9}{2}$ $\qquad -(x-1) = \frac{9}{2}$

$x = \frac{9}{2}+\frac{2}{2}$ $\qquad -x+1 = \frac{9}{2}$

$x = \frac{11}{2}$ $\qquad \frac{2}{2}-\frac{9}{2} = x$

$-\frac{7}{2} = x$



Solution $x \in \left]-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{11}{2}, \infty\right[$

Méthode algébrique :

$2|x-1|-4 = 5$

$2|x-1| = 9$

$|x-1| = \frac{9}{2}$

$x-1 = \frac{9}{2}$ $\qquad -(x-1) = \frac{9}{2}$

$x = \frac{11}{2}$ $\qquad x = -\frac{7}{2}$

Prenons $x = -6$

$2|x-1|-4$

$2|-6-1|-4$

$14-4$

$10 \geq 5$

Prenons $x = 0$

$2|x-1|-4$

$2|0-1|-4$

$2-4$

$-2 \not\geq 5$

Prenons $x = 10$

$2|x-1|-4$

$2|10-1|-4$

$18-4$

$14 \geq 5$

Solution $x \in \left]-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{11}{2}, \infty\right[$

Exemple 5 : Résous $|x| + x < 3$

$|x| + x = 3$

$|x| = 3 - x$

$x = 3 - x$ $\qquad$ $-x = 3 - x$

$2x = 3$ $\qquad$ $\cancel{0 = 3}$

$x = 3/2$

Prenons $x = 0$

$|x| + x < 3$

$|0| + 0 < 3$

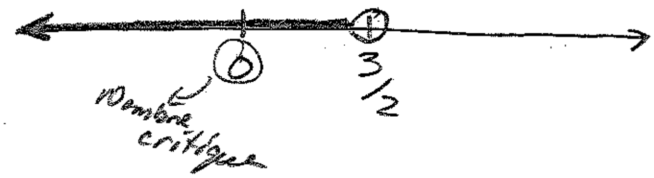
$0 < 3$

Prenons $x = 2$

$|x| + x < 3$

$|2| + 2 < 3$

$\cancel{4 < 3}$



Solution $x \in \left]-\infty, 3/2\right[$

Exemple 6 (Parcours C) : Résous $x^2 + |x| < 2$

$x^2 + |x| = 2$

$|x| = 2 - x^2$

$x = 2 - x^2$ $\qquad$ $-x = 2 - x^2$

$x^2 + x - 2 = 0$ $\qquad \begin{matrix} \frac{2}{2} \times \frac{-1}{-1} = -2 \\ \frac{2}{2} + \frac{-1}{-1} = 1 \end{matrix}$ $\qquad$ $x^2 - x - 2 = 0$ $\qquad \begin{matrix} \frac{-2}{-2} \times \frac{1}{1} = -2 \\ \frac{-2}{-2} + \frac{1}{1} = -1 \end{matrix}$

$x^2 - 1x + 2x - 2 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 1x - 2x - 2 = 0$

$x(x-1) + 2(x-1) = 0$ $\qquad$ $x(x+1) - 2(x+1) = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$ $\qquad$ $(x+1)(x-2) = 0$

$x = 1 \quad x = -2$ $\qquad$ $x = -1 \quad x = 2$

Solution $x \in \left]-1, 1\right[$

Prenons $x = -3$

$(-3)^2 + |-3| < 2$

$9 + 3 < 2$

$\cancel{12 < 2}$

Prenons $x = -1{,}5$

$(-1{,}5)^2 + |-1{,}5| < 2$

$\cancel{3{,}75 < 2}$

Prenons $x = 0$

$(0)^2 + |0| < 2$

$0 < 2$

Prenons $x = 1{,}5$

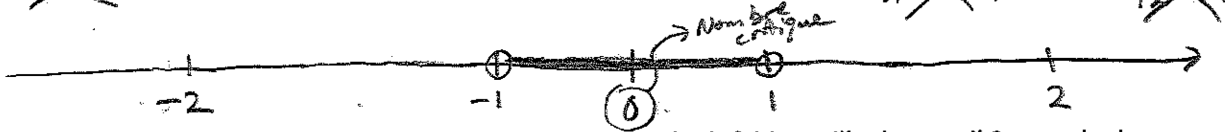
$(1{,}5)^2 + |1{,}5| < 2$

$\cancel{3{,}75 < 2}$

Prenons $x = 3$

$(3)^2 + |3| < 2$

$\cancel{12 < 2}$



Devoir : Parcours B : Visions page 31, nos 10 abcdefghi, Feuille de travail 2, nos abcd

Parcours C : Visions page 31, nos 10adfh, Feuille de travail 2, nos abcdefghi

Partie 3 : Quelques applications

Exemple 7: Élie Coptaire est un candidat qui s'envole vers la mairie de la ville. Les derniers sondages lui donnent 83% des voix avec une marge d'erreur de 3,2%. Détermine l'intervalle des suffrages qui lui seraient attribués selon ce sondage à l'aide d'une inéquation valeur absolue.

Soit x le suffrage exact.

$$|x-83| \leq 3,2$$

$x - 83 = 3,2$

$x = 86,2$

$-(x-83) = 3,2$

$-x + 83 = 3,2$

$-x = -78,8$

$x = 78,8$

Prenons

$x =$

Solution : $[78,8 \; , \; 86,2]$

Devoir : Parcours B et C : Omnimaths 11, page 297, nos 99, 100, 104, 106ab(parcours C)

Visions, pages 34-35, nos 22, 24, 25, 26, 27, 28