RAS 3.7 Les suites et les séries géométriques (Partie 1)

Une suite géométrique est une suite dont chaque terme subséquent est obtenu en multipliant le terme précédent par une quantité nommée raison géométrique et représentée par *r*. Le premier terme d'une suite géométrique est représenté par *a*.

Nous allons déterminer le terme général d'une suite géométrique. Pour ce faire, complète le tableau suivant.

	a = 2, r = 3	a = 3, r =2	a = 128, r = 1/2	a = 3, r = 3
t_1	2	3	128	3
t_2	$2\times3=6$	$3\times2=6$	$128\times\frac{1}{2}=64$	$3\times3=9$
t_3	$2\times3\times3=18$	$3\times2\times2=12$	$128\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=32$	$3\times3\times3=27$
t_4	$2\times3\times3\times3=54$	$3\times2\times2\times2=24$	$128\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=16$	$3\times3\times3\times3=81$
t_n	$2(3)^{n-1}$	$3(2)^{n-1}$	$128(\frac{1}{2})^{n-1}$	$3(3)^{n-1}$

En général, on a donc que $\boxed{t_n = a(r)^{n-1}}$.

*** Les termes d'une suite géométrique coïncident avec les coordonnées de points d'une fonction exponentielle. Ainsi, on peut modéliser les situations exponentielles à l'aide des fonctions exponentielles ou suites géométriques selon le besoin (variables discrètes ou continues).

Une série géométrique est la somme des termes d'une suite géométrique. Comme pour les séries arithmétiques, les séries géométriques ont une formule qui permet de les évaluer.

Soit $S_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

Sers-toi du terme général de la suite géométrique pour évaluer $S_4 - rS_4$.

$$S_4 - rS_4 = a + ar + ar^2 + ar^3 - r(a + ar + ar^2 + ar^3)$$

$$S_4 - rS_4 = a + \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \cancel{ar^3} - \cancel{ar} - \cancel{ar^2} - \cancel{ar^3} - ar^4$$

$$S_4 - rS_4 = a - ar^4$$

Isole S_4 dans cette équation. Quelle est la relation pour S_n?

$$S_4(1-r) = a(1-r^4)$$

$$S_4 = \frac{a(1-r^4)}{1-r}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$$

Exemple 1 : Détermine le terme général des suites géométriques suivantes.

$\{128, 64, 32, 16, 8, \ldots\}$ $\{12, -24, 48, -96, \ldots\}$

a) $\{3, 6, 12, 24, \ldots\}$ b) ~~$\{128, 32, 8, 2, \ldots\}$~~ c) ~~$\{12, -36, 108, -324, \ldots\}$~~

a)

$a = 3 \quad r = 2$

$t_n = ar^{n-1}$

$\boxed{t_n = 3(2)^{n-1}}$

b)

$a = 128 \quad r = 1/2$

$\boxed{t_n = 128(1/2)^{n-1}}$

→ Parcours B

$t_n = 2^7(2^{-1})^{n-1}$

$t_n = 2^7(2)^{-n+1}$

$\boxed{t_n = 2^{-n+8}}$

→ Parcours C

c)

$a = 12 \quad r = -2$

$\boxed{t_n = 12(-2)^{n-1}}$

→ Parcours B

$t_n = 3(-2)(-2)(-2)^{n-1}$

$\boxed{t_n = 3(-2)^{n+1}}$

→ Parcours C

Exemple 2 : Évalue les séries géométriques suivantes.

a) $3 + 1 + \cdots + {}^1/_{729}$

$a = 3$

$r = 1/3$

$n = ?$

$t_n = ar^{n-1}$

$\frac{1}{729} = 3(1/3)^{n-1}$

$\frac{1}{2187} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^7 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$7 = n - 1$

$n = 8$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$S_8 = \frac{3(1-(1/3)^8)}{1-1/3}$

$\boxed{S_8 = \frac{3280}{729}}$

b) $8 - 16 + 32 - \cdots - 1024$

$a = 8$

$r = -2$

$t_n = -1024$

$n = ?$

$-1024 = 8(-2)^{n-1}$

$-128 = (-2)^{n-1}$

$(-2)^7 = (-2)^{n-1}$

$7 = n - 1$

$n = 8$

$S_8 = \frac{8(1-(-2)^8)}{1-(-2)}$

$\boxed{S_8 = -680}$

Exemple 3 : Soit la série géométrique S_9 dont font partie $t_3 = 10$ et $t_6 = 80$. Quelle est la valeur de S_9?

$t_n = ar^{n-1}$

$t_3 = ar^2$

$10 = ar^2$

$t_6 = ar^5$

$80 = ar^5$

$\frac{\cancel{a}r^5}{\cancel{a}r^2} = \frac{80}{10}$

$\sqrt[3]{r^3} = \sqrt[3]{8}$

$r = 2$

$10 = a(2)^2$

$a = \frac{10}{4} \Rightarrow a = 5/2$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$S_9 = \frac{5/2(1-2^9)}{1-2}$

$\boxed{S_9 = \frac{-2555}{2}}$

Exemple 4 : Soit $t_n = 800(3)^{-n+3}$, détermine *a* et *r*.

$a = t_1$

$t_1 = 800(3)^{-1+3}$

$a = 800(9)$

$\boxed{a = 7200}$

$t_2 = 800(3)^{-2+3}$

$t_2 = 800(3)$

$t_2 = 2400$

$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{2400}{7200} = 1/3$

$\boxed{r = 1/3}$

Devoir : Parcours B et C : Omnimaths 12, pages 300-301, nos 1, 3, 5, 10, 13, 16, 17, 19

Omnimaths 12, pages 309-310, nos 1, 4, 5, 7, 16, 19, 21

Exemple 1 : Après chaque lavage, un jean bleu perd 1% de sa teinture. Quel pourcentage de sa teinture originale restera-t-il après 50 lavages ?

$100, \xrightarrow{\times 0{,}99} \underline{\quad}_{1^{e}\text{ lavage}}, \underline{\quad}_{2^{e}\text{ lavage}}, \ldots, \underline{?}_{50^{e}\text{ lavage}}$

$a = 100$

$r = 100\% - 1\% = 99\% = 0{,}99$

$n = 51$

$t_{51} = ?$

$t_n = ar^{n-1}$

$t_{51} = 100(0{,}99)^{51-1}$

$t_{51} = 60{,}5$

60,5 %

Exemple 2 : La valeur de revente d'une voiture, deux ans après l'achat, est de 10 000$. Trois ans plus tard, la valeur de revente est de 5 000$. La dépréciation annuelle de la valeur est un taux constant. Quelle était la valeur de la voiture à l'achat ?

$\underline{?}_{\text{achat}}, \underline{\quad}_{1\text{ an}}, \underline{10\,000}_{2\text{ ans}}, \underline{\quad}_{3\text{ ans}}, \underline{\quad}_{4\text{ ans}}, \underline{5000}_{5\text{ ans}}$

$a = ?$

$t_3 = 10000$

$t_6 = 5000$

$t_n = ar^{n-1}$

$t_3 = ar^{3-1}$

$10\,000 = ar^2$

$t_6 = ar^{6-1}$

$5000 = ar^5$

$\dfrac{\cancel{a}r^5}{\cancel{a}r^2} = \dfrac{5000}{10000}$

$r^3 = \frac{1}{2}$

$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow ar^2 = 10000$

$a = \dfrac{10000}{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2}$

$\Rightarrow \boxed{a = 15874\ \$}$

Exemple 3 : Le 1er septembre 2015, Jean Seigne entame une belle carrière qui semble lui être destiné. En planification de sa retraite, il place 100$ dans un RÉER le premier jour de chaque mois de travail. Le rendement de son RÉER est de 6% annuellement, composé mensuellement et il prendra sa retraite le 1er septembre 2050. Combien d'intérêt aura-t-il accumulé dans son RÉER au premier jour de sa retraite?

$35 \times 12 = 420$ $\qquad r = 1 + \frac{0{,}06}{12} = 1{,}005$

$M = C(1+i)^n$

$100(1{,}005)^{420} + 100(1{,}005)^{419} + \cdots + 100(1{,}005)^1$

$100(1{,}005)^1 + 100(1{,}005)^2 + \cdots + 100(1{,}005)^{419} + 100(1{,}005)^{420}$

$r = 1{,}005$

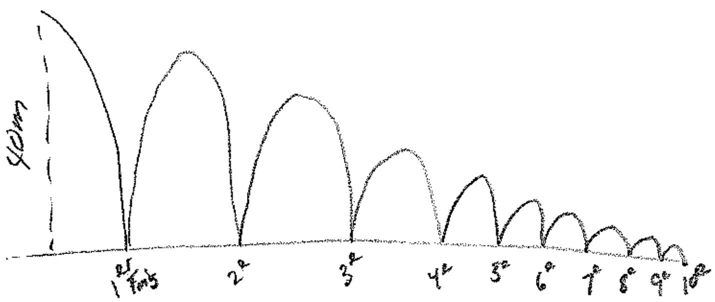
$n = 420$

$a = 100{,}50$

$$S_{420} = \frac{100{,}50\left(1-(1{,}005)^{420}\right)}{1-1{,}005}$$

$$= 143\,183{,}39\,\$$$

Exemple 4 : On laisse tomber une balle d'une hauteur de 40 m. Elle rebondit toujours à 60% de sa hauteur précédente. Détermine la distance totale parcourue par la balle au moment où elle touche le sol pour la 10e fois.



Distance en descendant (seulement)

$a = 40$

$r = 0{,}6$

$n = 10$

$$S_{10} = \frac{40\left(1-(0{,}6)^{10}\right)}{1-0{,}6} = 99{,}4$$

$$d = 99{,}4 \times 2 - 40$$

$$d = 158{,}8\text{ m}$$

Devoir : Parcours B : Omnimaths 12, pages 300-301, nos 23, 24, 29, 34, 36
pages 309-310, nos 22a, 23, 24, 27, 28, 31

Parcours C : Omnimaths 12, pages 300-301, nos 23, 24, 29, 31, 34, 36
pages 309-310, nos 22a, 23, 27, 28, 29, 31, 34