RAS 3.7 Suites et séries arithmétiques

Rappels : Une suite numérique est dite arithmétique si la différence entre les termes consécutifs est constante. Le terme général d'une suite arithmétique dont le premier terme est a et la différence est $d$est donné par $t_n = a + (n-1)d$. Une série est la somme des termes d'une suite. Pour déterminer la valeur d'une série arithmétique, on peut utiliser les relations suivantes : $S_n = \frac{n}{2}(a + t_n)$ ou $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$.

Exemple 1. Évalue. 3 + 7 + 11 + ... + 71

$a = 3$

$d = 4$

$t_n = 71$

$t_n = a + (n-1)d$

$71 = 3 + (n-1)(4)$

$71 = 3 + 4n - 4$

$\frac{72}{4} = \frac{4n}{4} \Rightarrow n = 18$

$S_n = \frac{n}{2}(a + t_n)$

$S_{18} = \frac{18}{2}(3 + 71)$

$S_{18} = 9(74)$

$\boxed{S_{18} = 666}$

Exemple 2. Soit la suite définie par $t_n = 3n + 2$, détermine S_{15}. $\Rightarrow n = 15$

$t_{15} = 3(15) + 2$

$t_{15} = 47$

$a = t_1 = 3(1) + 2$

$a = t_1 = 5$

$a = 5$

$\underset{1^e}{5} + \dots + \underset{15^e}{47}$

$S_n = \frac{n}{2}(a + t_n)$

$S_{15} = \frac{15}{2}(5 + 47)$

$S_{15} = 7{,}5(52)$

$\boxed{S_{15} = 390}$

Exemple 3. Détermine le terme général de la suite dont $S_{50} = 4875$ et $S_{100} = 22\ 250$

$t_n = a + (n-1)d \qquad a = ? \quad d = ?$

$S_{50} = 4875$ et $S_{100} = 22\ 250$

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

$4875 = \frac{50}{2}(2a + (50-1)d)$

$195 = 2a + 49d$

$-(445 = 2a + 99d)$

$-250 = -50d$

$d = 5$

$22\ 250 = \frac{100}{2}(2a + (100-1)d)$

$445 = 2a + 99d$

$445 = 2a + 99(5)$

$-50 = 2a$

$a = -25$

Terme général

$\Rightarrow t_n = a + (n-1)d$

$t_n = -25 + (n-1)(5)$

$t_n = -25 + 5n - 5$

$\boxed{t_n = 5n - 30}$

Devoir : Parcours B : Omnimaths 12, pages 295-296, nos 12, 16, 19, 33, 35, 36, 39, 41a, 45
Feuille de travail nos 1abde, 2ab, 3, 4, 5, 7a

Parcours C : Omnimaths 12, pages 295-296, nos 12, 16, 20, 33, 35, 36, 39, 43, 45, 46, 48
Feuille de travail au complet