Cours 1

Mise en situation

La compagnie Montrex se spécialise dans la fabrication de deux types de montres: un modèle *A* (automatique) et un modèle *F* (fluorescent). Durant une journée, il y a 3 heures de disponibles pour l'utilisation de la machinerie et 7 heures de disponibles pour la bijouterie. Le modèle *A* exige 1,5 heure de machinerie et 1 heure de bijouterie, alors que le modèle *F* exige 0,5 heure de machinerie et 2 heures de bijouterie. Mathématise ces contraintes. La compagnie Montrex se fait un profit de 35,43 $ sur chaque modèle A et 43,45$ sur chaque modèle F. Combien de chaque modèle la compagnie Montrex devrait-elle vendre pour maximiser son profit.

(1 modèle A et 3 modèles F)

Rappel : Représente graphiquement le système d'inéquations suivant. Écris dans le plan cartésien les coordonnées des sommets de la région polygonale.

$x \geq 0$

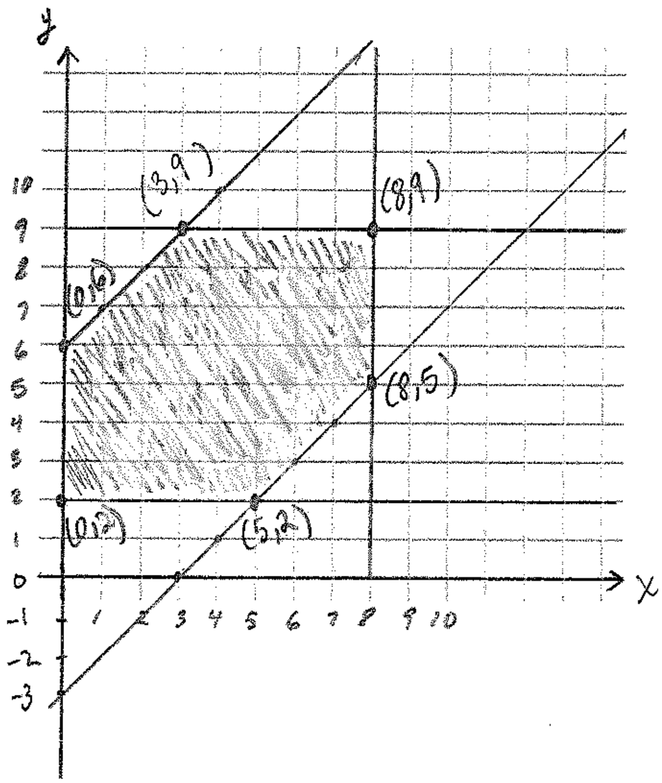
$x \leq 8$

$y \geq 2$

$y \leq 9$

$y \leq x + 6$

$y \geq x - 3$



L'optimisation linéaire

La programmation linéaire est le domaine d'étude qui s'intéresse aux problèmes d'optimisation faisant intervenir des inéquations et des équations du premier degré.

Un problème d'optimisation contient deux types d'objets mathématiques :

- Des contraintes représentées par un système d'équations linéaires. Il n'y a pas de maximum quant au nombre de contraintes possibles dans un problème.
- Une fonction linéaire à optimiser.

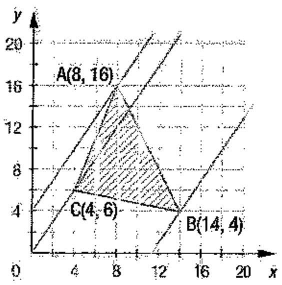
Dans un problème contextualisé, on peut vouloir minimiser les coûts, la dépense énergétique ou la consommation d'essence ou maximiser les revenus, le salaire ou l'énergie produite.

Résoudre un problème d'optimisation, c'est chercher la solution qui engendre un **maximum** ou un **minimum** de la fonction à optimiser en tenant compte de diverses contraintes et de l'objectif visé. Il existe deux cas possibles :

1. Les coordonnées d'un seul point du polygone de contraintes engendrent la solution optimale. Ce point correspond généralement à un sommet.
2. Les coordonnées de plusieurs points du polygone de contrainte engendrent la solution optimale. Ces points constituent généralement un côté.

Voici un exemple pour chaque cas :

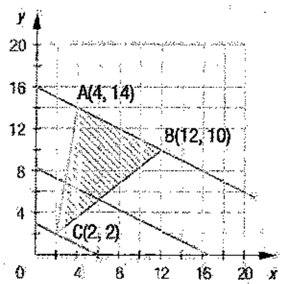
1)



Sommet	$z = 3x - 2y$
A(8, 16)	$z = 3 \times 8 - 2 \times 16 = -8$
B(14, 4)	$z = 3 \times 14 - 2 \times 4 = 34$
C(4, 6)	$z = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$

- Les coordonnées du point A minimisent la fonction à optimiser.
- Les coordonnées du point B maximisent la fonction à optimiser.

2)

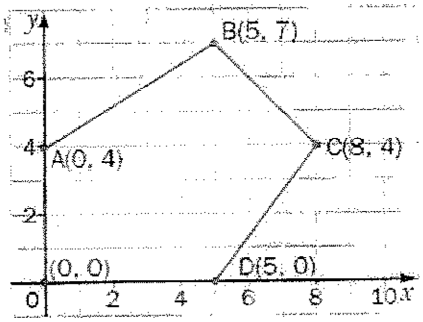


Sommet	$z = 3x + 6y$
A(4, 14)	$z = 3 \times 4 + 6 \times 14 = 96$
B(12, 10)	$z = 3 \times 12 + 6 \times 10 = 96$
C(2, 2)	$z = 3 \times 2 + 6 \times 2 = 18$

- Puisque les coordonnées des sommets A et B engendrent la valeur maximale de la fonction à optimiser, les coordonnées de tous les points situés sur le côté AB maximisent la fonction.
- Les coordonnées du point C minimisent la fonction à optimiser.

Exemple 1 : Soit le polygone de contraintes ci-contre. Détermine

a) Le maximum de l'équation z = 3x + 4y



$(0,0) \rightarrow z = 3(0) + 4(0) = 0$

$(0,4) \rightarrow z = 3(0) + 4(4) = 16$

$\boxed{(5,7) \rightarrow z = 3(5) + 4(7) = 43}$

$(8,4) \rightarrow z = 3(8) + 4(4) = 40$

$(5,0) \rightarrow z = 3(5) + 4(0) = 15$

Le maximum de la fonction z est 43

b) Le minimum de l'équation z = 5x – 2y

$(0,0) \rightarrow z = 5(0) - 2(0) = 0$

$(0,4) \rightarrow z = 5(0) - 2(4) = -8$

$(5,7) \rightarrow z = 5(5) - 2(7) = 11$

$(8,4) \rightarrow z = 5(8) - 2(4) = 32$

$(5,0) \rightarrow z = 5(5) - 2(0) = 25$

Le minimum de la fonction z est -8

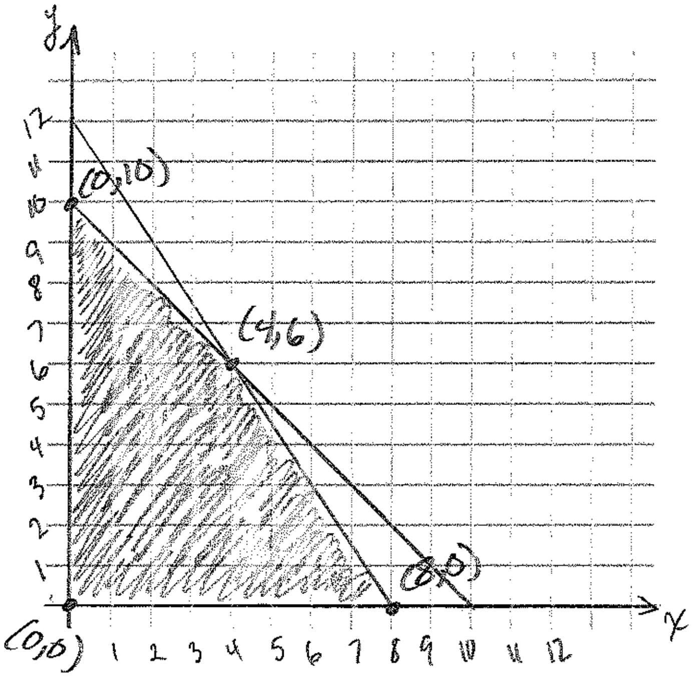
Devoir : Parcours B : Visions, pages 306-311, nos 1ab, 3ab, 5a, 6ab

Parcours C : Visions, pages 306-311, nos 1ac, 3ab, 5a, 6b, 7a

Exemple 2 : Kim organise un solde de fin de semaine à sa boutique de vêtements. Elle a décidé d'annoncer cet événement à la radio. Elle veut que son message soit diffusé au maximum 10 fois et elle ne veut pas dépenser plus de 2400\$. Pour un message publicitaire de 30 secondes, la station de radio demande 300\$ si la diffusion a lieu entre 6h et 9h. Elle demande 200\$ pour un message de 30 secondes s'il a lieu entre 16h et 18h. La station a 8000 auditeurs entre 6h et 9h, et 6000 auditeurs entre 16h et 18h. Combien de fois devrait-elle faire diffuser sa publicité dans chaque case horaire pour maximiser le nombre de personnes qui entendront son message publicitaire?

x : nombre de fois diffusé le matin.

y : nombre de fois diffusé le soir.



$x + y \leq 10$

$\Rightarrow y \leq -x + 10$

$300x + 200y \leq 2400$

$\Rightarrow y \leq -\frac{3}{2}x + 12$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

La fonction à maximiser (# de personnes qui entendront le message)

$\Rightarrow f(x,y) = 8000x + 6000y$

$(0,0) = 8000(0) + 6000(0) = 0$

$(0,10) = 8000(0) + 6000(10) = 60\,000$

$(4,6) = 8000(4) + 6000(6) = \boxed{68\,000}$ Max

$(8,0) = 8000(8) + 6000(0) = 64\,000$

Kim devrait diffuser son message 4 fois le matin et 6 fois le soir

Rappel : On peut déterminer algébriquement le point d'intersection entre deux droites en résolvant le système de deux équations deux inconnues qui lui est associé.

Exemple 3 : La firme Sport Illimitée fabrique des balles molles et des balles de base-ball. Chaque balle de base-ball doit passer une minute à la machine à coudre et trois minutes à la machine à recouvrir. Chaque balle molle doit passer deux minutes à la machine à coudre et deux minutes à la machine à recouvrir. La machine à coudre ne peut être utilisée que 100 minutes par jour, tandis qu'on peut utiliser la machine à recouvrir jusqu'à 180 minutes par jour. Le profit réalisé est de 2$ sur une balle de base-ball et de 3$ sur une balle molle. Combien de balles de chaque sorte doit-on fabriquer chaque jour pour maximiser les profits ?

x : # de balles molles
y : # de balles de base-ball

	Machine à coudre	Machine à recouvrir
x	2 min	2 min
y	1 min	3 min
temps total	100 min	180 min

Machine à coudre

$2x + 1y \leq 100$

$\hookrightarrow y \leq -2x + 100$

$x \geq 0$
$y \geq 0$

Machine à recouvrir

$2x + 3y \leq 180$

$\hookrightarrow y \leq \frac{-2}{3}x + 60$

Le profit réalisé est représenté par la relation suivante :

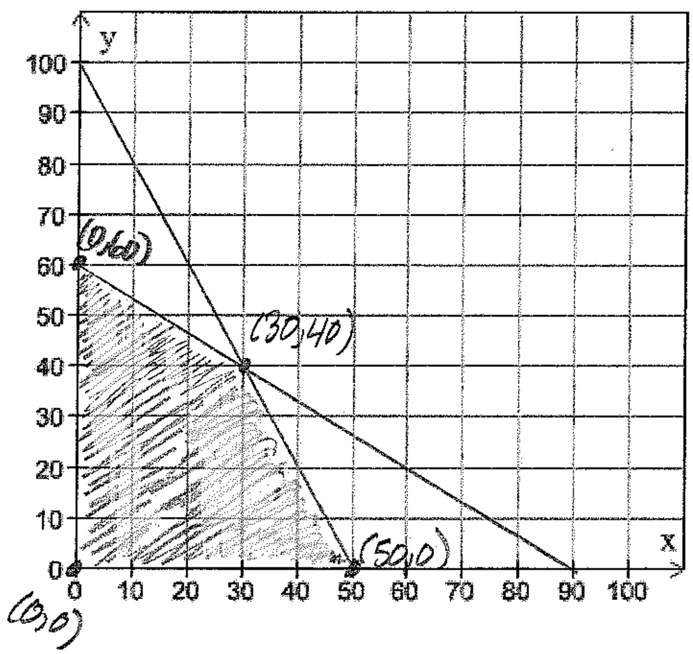
$P(x,y) = 3x + 2y$

$(0,0) = 3(0) + 2(0) = 0\$$

$(0,60) = 3(0) + 2(60) = 120\$$

Max $\rightarrow (30,40) = 3(30) + 2(40) = \boxed{170\$}$

$(50,0) = 3(50) + 2(0) = 150\$$



Le maximum de profit que la firme Sport Illimitée peut recevoir est 170$ en vendant 30 balles molles et 40 balles de base-ball.

Devoir (Parcours B et C) : Feuille de travail 1

Cours 3

Travail :

Parcours B :
Problèmes photocopiés : Deux emplois à la fois, Bon matin, Rock et Rap, Artiste à l'œuvre, Soirée de fin d'année, Les biscuits

Parcours C :
Problèmes photocopiés : Deux emplois à la fois, Bon matin, Rock et Rap, Artiste à l'œuvre, Soirée de fin d'année, Une pilote accomplie, Les biscuits

Cours 4

Travail (Parcours B et C):

Feuille de travail 2