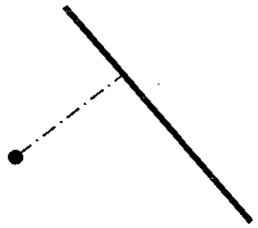
RAS 3.4 – La distance entre un point et une droite (Partie 1 : la méthodologie)

En 10e année, vous avez vu la formule permettant de déterminer la distance entre deux points, $P_1\ (x_1, y_1)$ et $P_2\ (x_2, y_2)$. Cette relation est $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Qu'en est-il de la distance (minimale) entre un point et une droite ?

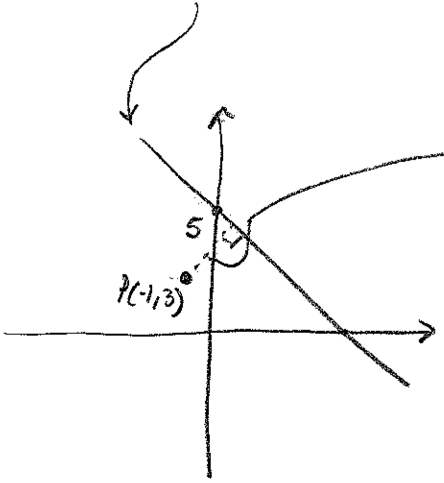


Dans la figure ci-contre, on constate que la distance minimale entre le point et la droite est représentée par le segment pointillé, qui est en fait perpendiculaire à la droite.

Il suffit donc de trouver le point d'intersection entre la droite et la droite perpendiculaire qui passe le point en question. On substitue ensuite ces coordonnées dans la formule de la distance entre deux points.

Exemple 1 : Trouve la distance entre le point P(-1 , 3) et la droite définie par l'équation $x + y - 5 = 0$, au centième près.

$y = -x + 5$



① Trouver le point d'intersection entre la droite et la ligne pointillé (droite ⊥)

$y = x + b$
$3 = -1 + b$
$4 = b$

⇒ l'équation de la ligne poitillé est : $y = x + 4$

$y = \boxed{x+4}$ et $y = -x + 5$

$x + 4 = \boxed{-x} + 5$

$\frac{2x}{2} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{9}{2}$

Point d'intersection $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$

② Trouve la distance (minimale) entre le point P(-1,3) et la droite.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{(-1 - \frac{1}{2})^2 + (3 - \frac{9}{2})^2}$

$d = \sqrt{2{,}25 + 2{,}25} = \boxed{2{,}12 \text{ unités}}$

Exemple 2 : Détermine la distance, au centième près, entre le point (3, 0) et la droite passant par les points (3, 4) et (5, 3).

① déterminons l'équation de la droite qui passe par (3,4) et (5,3)

x_1 y_1 x_2 y_2

$y = mx + b$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$y = -\frac{1}{2}x + b$ $m = \frac{3-4}{5-3} = \frac{-1}{2}$

$4 = -\frac{1}{2}(3) + b$

$4 = -\frac{3}{2} + b \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

$\frac{11}{2} = b$

② déterminons l'équation de la droite à $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ qui passe par le point (3,0)

$y = 2x + b \Rightarrow y = 2x - 6$

$0 = 2(3) + b$

$-6 = b$

③ Point d'intersection?

$y = 2x - 6$ et $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

$-\frac{1}{2}x + \frac{11}{2} = 2x - 6$

$-x + 11 = 4x - 12$

$23 = 5x$

$x = \frac{23}{5}$ $y = 2\left(\frac{23}{5}\right) - 6$

$y = \frac{16}{5}$

$\left(\frac{23}{5}, \frac{16}{5}\right)$

④ distance? $\overset{x_1\,y_1}{(3,0)}$ et $\overset{x_2\,y_2}{\left(\frac{23}{5}, \frac{16}{5}\right)}$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d = \sqrt{\left(\frac{23}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{16}{5} - 0\right)^2}$

$d = \sqrt{2{,}56 + 10{,}24}$

$\boxed{d = 3{,}58 \text{ unités}}$

Devoir : Parcours B et C : Omnimaths 11, page 475-476, nos 27, 29, 31, 33, 35, 47, 54

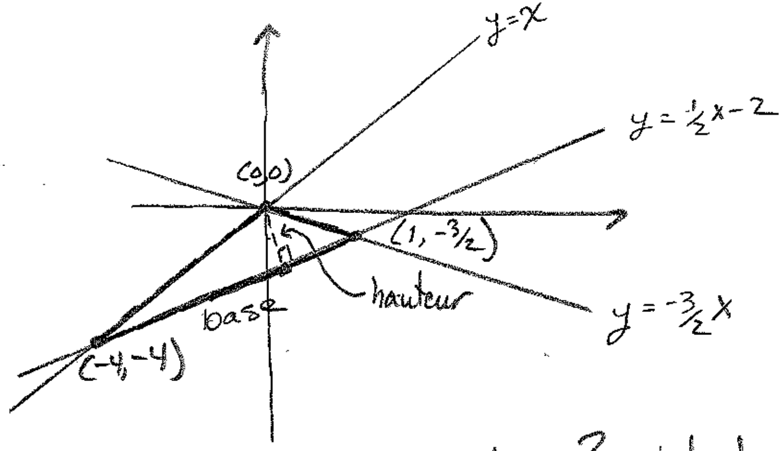
RAS 3.4 – La distance entre un point et une droite (Partie 2 : les applications)

Exemple 3 : Détermine l'aire du triangle situé entre les droites d'équation $y = x$, $3x + 2y = 0$ et $x - 2y - 4 = 0$.

$y = x$

$y = \frac{-3}{2}x$

$y = \frac{1}{2}x - 2$



$$A_\Delta = \frac{b \times h}{2}$$

① La base ?

$y = \frac{1}{2}x - 2$ et $y = \boxed{\frac{-3}{2}x}$

$-\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x - 2$

$2 = 2x$

$x = 1 \Rightarrow y = -3/2$

$(1, -3/2)$

$y = \boxed{x}$ et $y = \frac{1}{2}x - 2$

$x = \frac{1}{2}x - 2$

$\frac{1}{2}x = -2$

$x = -4 \Rightarrow y = -4$

$(-4, -4)$

$d(\text{base}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{base} = \sqrt{(-4-1)^2 + (-4 - -3/2)^2} = \boxed{5{,}59 \text{ unités base}}$

② hauteur ? est ⊥ à la base ($y = \frac{1}{2}x - 2$)

$y = mx + b$

$y = -2x + 0$

$y = \boxed{-2x}$ et $y = \frac{1}{2}x - 2$

$-2x = \frac{1}{2}x - 2$

$2 = \frac{5}{2}x$

$x = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{-8}{5}$

$(\frac{4}{5}, \frac{-8}{5})$

$d(\text{hauteur}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{hauteur} = \sqrt{(\frac{4}{5} - 0)^2 + (-\frac{8}{5} - 0)^2}$

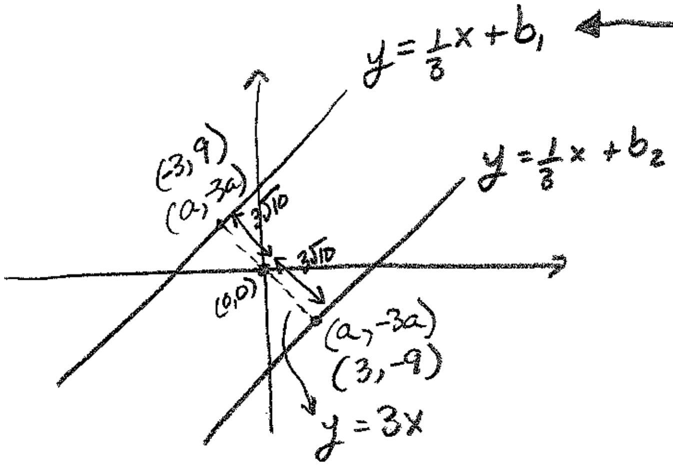
$\boxed{\text{hauteur} = 1{,}79 \text{ unités}}$

$$A_\Delta = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_\Delta = \frac{5{,}59 \times 1{,}79}{2}$$

$$\boxed{A_\Delta = 5 \text{ unités}^2}$$

Exemple 4 (Parcours C) : Écris les équations des deux droites qui satisfont aux deux conditions suivantes : 1) pente de $\frac{1}{3}$ et 2) distance la plus courte à partir de l'origine de $3\sqrt{10}$.



$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$3\sqrt{10} = \sqrt{(a-0)^2+(-3a-0)^2}$$

$$3\sqrt{10} = \sqrt{a^2+9a^2}$$

$$(3\sqrt{10})^2 = (\sqrt{10a^2})^2$$

$$9 \times 10 = 10a^2$$

$$9 = a^2$$

$$a = \pm 3$$

$$y = \frac{1}{3}x + b_2$$

$$-9 = \frac{1}{3}(3) + b_2$$

$$-9 = 1 + b_2$$

$$-10 = b_2$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x - 10}$$

$$y = \frac{1}{3}x + b_1$$

$$9 = \frac{1}{3}(-3) + b_1$$

$$9 = -1 + b_1$$

$$10 = b_1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + 10}$$

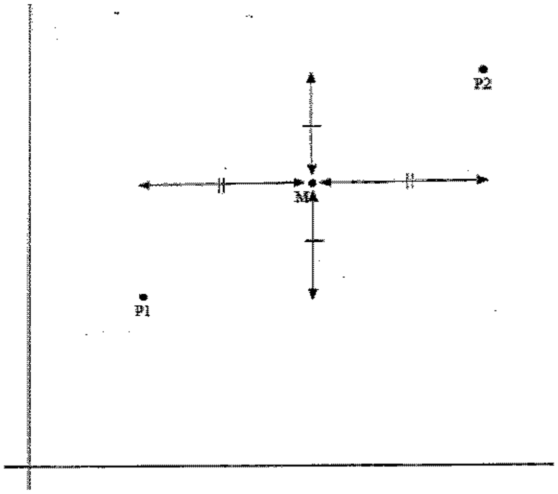
Devoir : Parcours B : Omnimaths 11^e, pages 475-476, nos 48, 50b, 51b, 54, 55b

Parcours C : Omnimaths 11^e, pages 475-476, nos 49, 50b, 51b, 53, 54, 55b, 60ab

Rappel : $A_{trapèze} = \frac{(b_1+b_2)\cdot h}{2}$

RAS 3.4 – Points de partage (Partie 3)

Rappel : Soit M, le point milieu entre les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$. Les coordonnées de M sont donc $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Géométriquement, M se situe à la rencontre du milieu des abscisses et du milieu des ordonnées, comme présenté dans la figure suivante :



On remarque que le point M coupe aussi le segment P_1P_2 en deux parties égales. Ainsi, pour trouver les coordonnées de M, on pourrait aussi déterminer la moitié des déplacements horizontaux ($\frac{x_2-x_1}{2}$) et verticaux ($\frac{y_2-y_1}{2}$) entre les deux points et les additionner à l'abscisse et l'ordonnée de P_1.

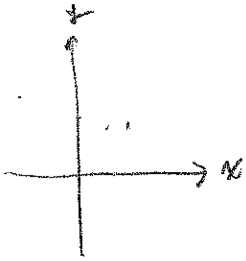
Que fait-on si on veut couper le segment P_1P_2en trois parties égales ? Combien de points seront nécessaires ?

On divise les déplacements par $\underline{\underline{3}}$ et on les additione à P_1 (2 fois)

Il y aura 2 points de partage.

Exemple 1 : Soient les points T $\overset{P_2}{(3, 4)}$ et U $\overset{P_1}{(-17, 9)}$. Détermine les coordonnées des points qui divisent le segment TU en 5 parties.

dép. Horizontal	Vertical
$\frac{3--17}{5}$	$\frac{4-9}{5}$
$\frac{20}{5}$	$\frac{-5}{5}$
4	-1



4 points de partage :

① $(-17+4, 9-1) \rightarrow (-13, 8)$

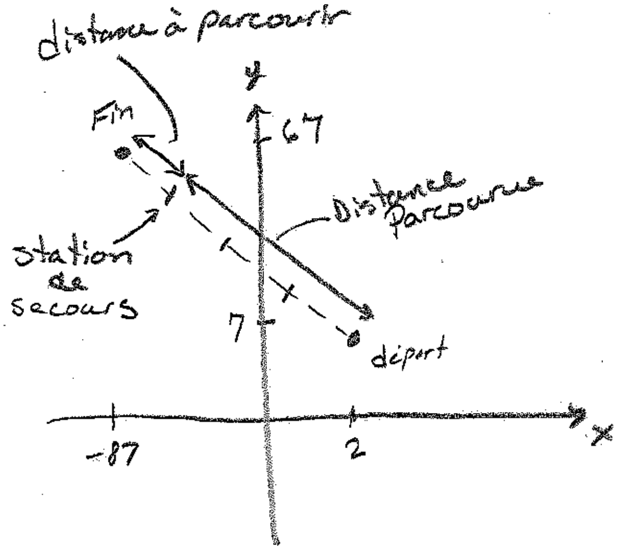
② $(-17+2(4), 9+2(-1)) \rightarrow (-9, 7)$

③ $(-17+3(4), 9+3(-1)) \rightarrow (-5, 6)$

④ $(-17+4(4), 9+4(-1)) \rightarrow (-1, 5)$

Exemple 2 : On veut placer une station de secours dans un sentier rectiligne menant au sommet d'une montagne. Dans un repère, on retrouve le départ du sentier au point (2, 7) et sa fin au point (-87, 67). La station de secours doit être située à l'endroit où la distance parcourue est le triple de la distance à parcourir. Quelles sont les coordonnées de la station de secours ?

$3:1 \Rightarrow \frac{3}{4}$



<u>dép. Horizontal</u>

$$\frac{-87-2}{4} = \frac{-89}{4} = -22,25$$

<u>dép. Vertical</u>

$$\frac{67-7}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

$$(2 + 3(-22,25), 7 + 3(15))$$

$$(-64,75 , 52)$$

La station de secours se trouve à (-64,75, 52)

Devoir : Parcours B : Omnimaths 11, nos 3, 6, 13, 18, 19, 24, 25a, 26, 27, 29abc, 32ab, 33ab, 35b
Parcours C : Omnimaths 11, nos 3, 6, 23, 25abcd, 26, 27, 29abc, 32ab, 33ab, 34a, 35bd