RAS 3.4 L'équation du cercle.

Cours 1 – L'équation du cercle

Rappel : Le cercle est un lieu géométrique dont tous les points sont situés à égale distance d'un même point appelé centre. La distance entre le centre du cercle et son extrémité est le rayon.

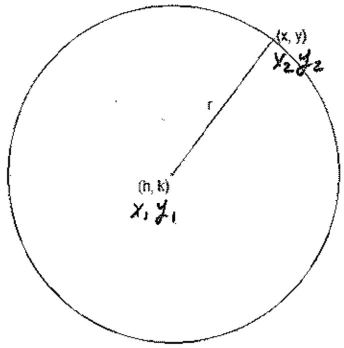
Dans un plan cartésien, on veut avoir tous les couples (x, y) situés à une distance r du centre (h, k). Nous allons démontrer l'équation canonique d'un cercle à partir de la formule de distance entre deux points.

Nous cherchons tous les points (x, y) qui sont situés à une distance r du centre (h, k).

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$



Équation canonique du cercle de rayon r et centre (h, k): $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Exemple 1 : Détermine l'équation du cercle représenté graphiquement ci-dessous. $h = ?$ $k = ?$ $r = ?$

Centre $\rightarrow (h, k) \rightarrow (4, -2)$

Point $\rightarrow (x, y) \rightarrow (8.2, 3.6)$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

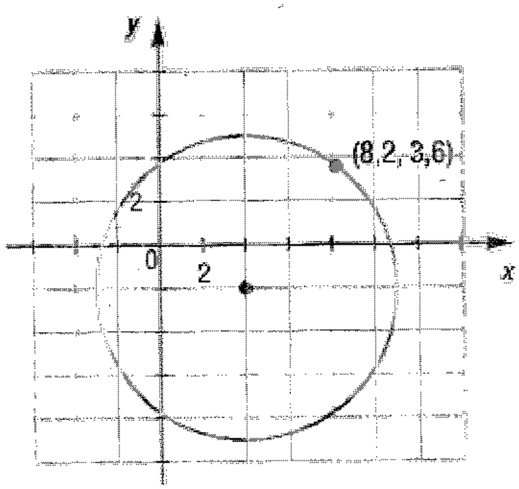
$(8{,}2 - 4)^2 + (3{,}6 - -2)^2 = r^2$

$17{,}64 + 31{,}36 = r^2$

$r^2 = 49$

$r = \pm 7$

$r = +7$ et $\cancel{r = -7}$



L'équation est $\boxed{(x-4)^2 + (y+2)^2 = 49}$

Exemple 2 : Détermine le centre et le rayon du cercle d'équation générale : $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y - 6 = 0$

Pour trouver le centre et le rayon du cercle suivant, il faut changer l'équation à la forme canonique $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ à l'aide de la complétion du carré.

$$\frac{3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 2$$

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 - 4y + 4 - 4) = 2$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 2$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 7$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 7 \longrightarrow r^2 = 7, \quad r = \sqrt{7}$$

Centre → (h, k) → $(-1, 2)$ et rayon $= \sqrt{7}$

Exemple 3 : Détermine si le point $(3,7)$ se situe sur la circonférence du cercle d'équation $x^2 + (y-3)^2 = 25$

$x\ y$

Il s'agit de remplacer le point $(3,7)$ dans l'équation afin d'étudier si ce point satisfait l'équation

$$(3)^2 + (7-3)^2 = 25$$

$$9 + 16 = 25$$

$$25 = 25 \checkmark$$

⇒ Le point $(3,7)$ se situe sur la circonférence.

Devoir : Omnimaths 11 pages 481-482, nos 5, 7, 10, 19, 21, 28, 35, 37ad, 40, 41, 46, 55, 38, 45

Feuille d'exercices no 1