Exemple 1 : Le cobalt-60 (^{60}Co) est un isotope radioactif fabriqué dans des réacteurs nucléaires spécialisés. On observe une certaine quantité de cobalt se désintégrer. La quantité restante, *Q(t)*, en grammes, en fonction du temps écoulé, *t*, en mois est donnée par la règle :

$$Q(t) = 60\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{64}}$$

a) Quelle est la quantité initiale de ^{60}Co ?

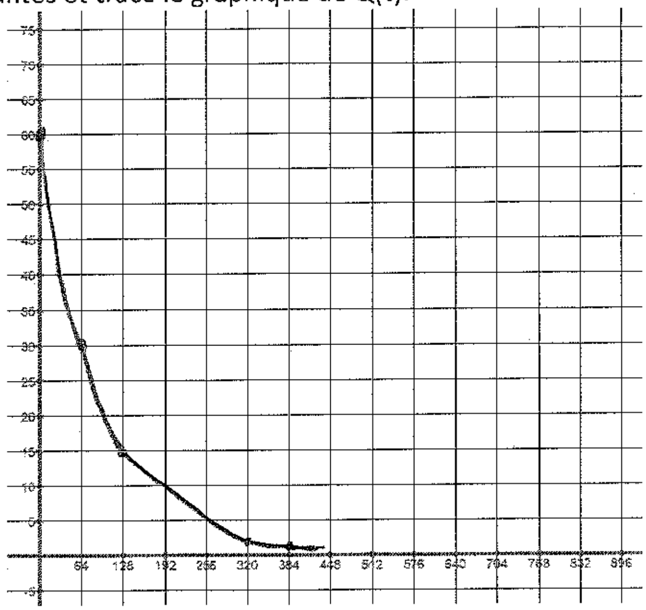
60g

b) Décris l'évolution de la quantité de ^{60}Co.

La quantité diminue de moitié tous les 64 mois.

c) Complète la table des valeurs suivantes et trace le graphique de Q(t).

t	Q(t)
0	60
64	30
128	15
192	7,5
256	3,75
320	1,875
384	0,9375



d) Dans quelques centaines d'années, quelle sera la quantité restante de ^{60}Co?

Il n'y en aura presque plus.

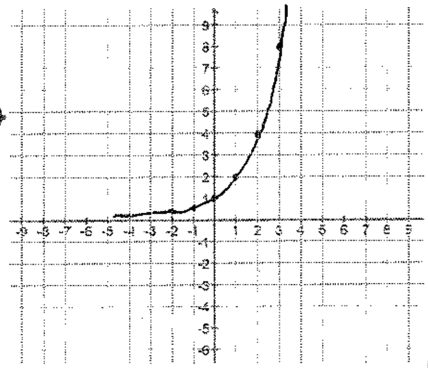
La fonction exponentielle a pour forme canonique $f(x) = aB^{x-h} + k$, où B est un nombre strictement positif différent de 1.

Rôle de la base, B

Complète la table des valeurs suivante pour la fonction $f(x) = 2^x$ et trace son graphique.

x	f(x)
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

Cette exemple

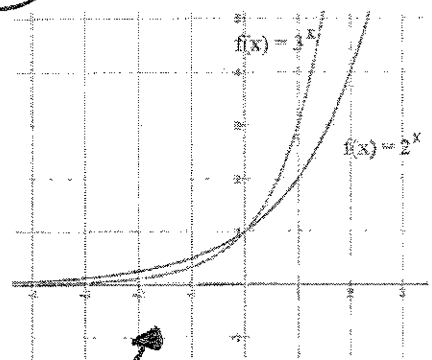


Exemple!

On constate que lorsque B > 1 la fonction exponentielle est croissante tandis qu'elle est décroissante lorsque 0 < B < 1. Dans les deux cas, la fonction exponentielle s'approche d'une valeur limite, soit 0 dans les deux cas précédents. On appelle asymptote la droite vers laquelle la courbe de f(x) s'approche lorsque x tend vers ±∞.

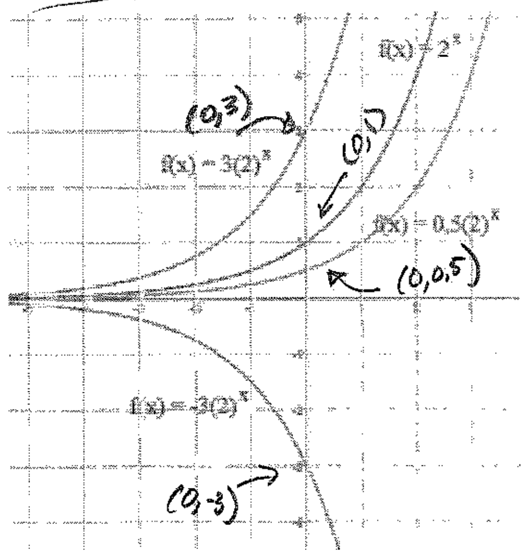
La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = B^x$ passe toujours par le point (0, 1). → $B^0 = 1$

Soit B > 1. Plus la valeur de B augmente, plus la croissance de la fonction est rapide.



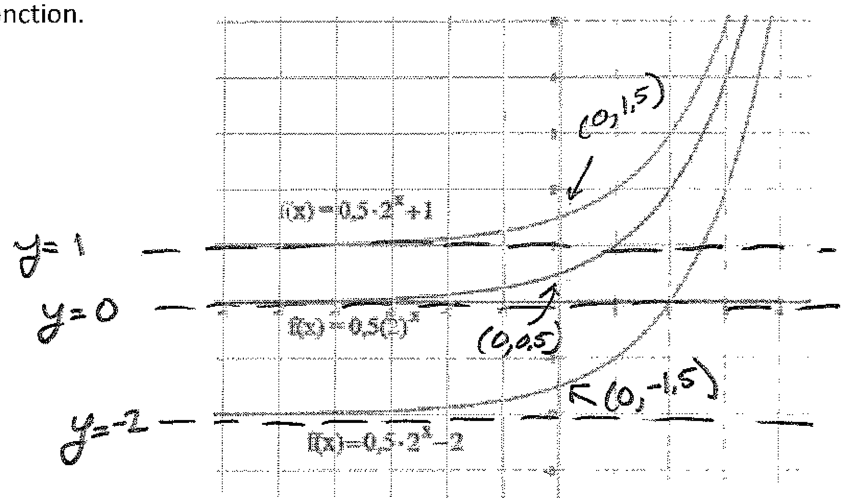
Rôles du paramètre a

La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = a\,B^x$ passe toujours par le point (0, a). Lorsque le paramètre a est négatif, la courbe subit une réflexion par rapport à l'axe des x.
(l'axe de l'assymptote?)



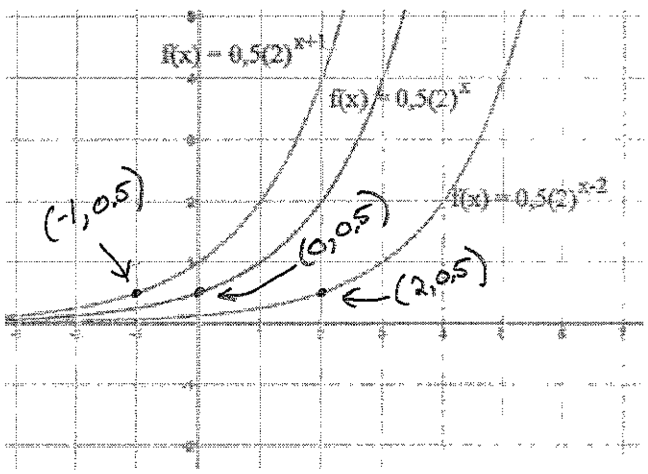
Rôles du paramètre k

La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = a\,B^{x} + k$ passe toujours par le point (0, a+k). L'équation y = k est l'équation de l'asymptote de la fonction.



Rôles du paramètre h (Parcours C)

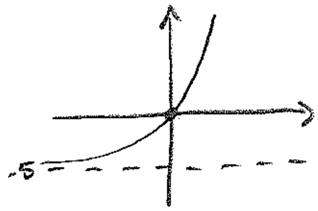
La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = a\,B^{x-h} + k$ passe toujours par le point (h, a+k). Le graphique subit une translation horizontale.

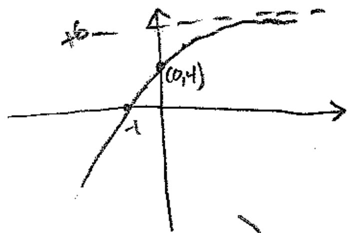


Exemple 2 : Complète le tableau ci-dessous pour chaque fonction.

Caractéristique	$f(x) = 5(2)^x - 5$	$g(x) = -2(1/3)^x + 6$	$h(x) = -(2)^{x-1} - 2$ (Parcours C)
Domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Codomaine	$y \in]-5, \infty[$	$y \in]-\infty, 6[$	$y \in]-\infty, -2[$
Valeur initiale	0	4	$-5/2$
Zéro	0	-1	aucun
Variation	Croissant sur $\mathbb{R}$	Croissant sur $\mathbb{R}$	décroissante sur $\mathbb{R}$
Équation de l'asymptote	$y = -5$	$y = 6$	$y = -2$

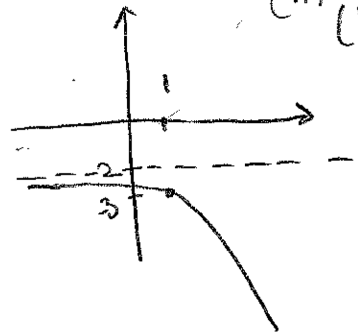
$(0, a+k)$
$(0, 5-5)$
$(0, 0)$





$(0, -2+6)$
$(0, 4)$

$(h, a+k)$
$(1, -3)$



Exemple 3 : Voici la représentation graphique d'une fonction exponentielle de la forme $f(x) = aB^x + k$. Détermine la règle de la fonction.

$y = aB^x + k$

$y = aB^x + 4$

$y = 2B^x + 4$

$14 = 2B^{-1} + 4$

$\frac{10}{2} = \frac{2B^{-1}}{2}$

$5 = B^{-1}$

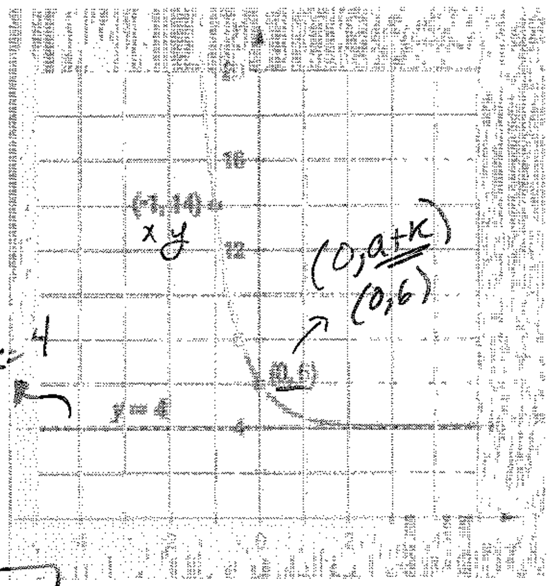
$5 = \frac{1}{B} \Rightarrow B = 1/5$

$a + k = 6$

$a + 4 = 6$

$a = 2$

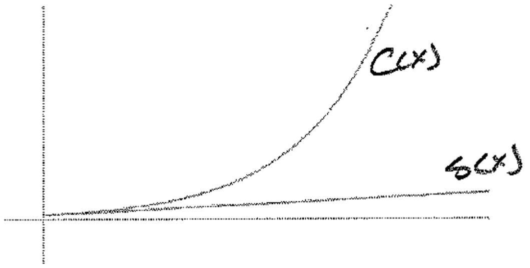
$k = 4$



$\Rightarrow \boxed{y = 2(1/5)^x + 4}$

Exemple 4 : Un retour sur l'intérêt composé et l'intérêt simple.

Mise en contexte : Jean-Paul veut investir 100 $. Il a le choix entre un taux d'intérêt annuel de 5% composé annuellement et un taux d'intérêt annuel simple de 5%. Soient C(x) et S(x), les deux règles représentant la valeur de l'investissement après x années, détermine les règles de C(x) et S(x) et associe les aux courbes dans le plan cartésien ci-dessous.



$C(x) = 100(1+0,05)^x$

$C(x) = 100(1,05)^x$

$C(50) = 1146,74$

$I = cid$

$S(x) = 100 + I$

$S(x) = 100 + 100(0,05)(x)$

$S(x) = 100 + 5x$

Si $x = 50$

$S(50) = 350$

On remarque que la croissance est beaucoup plus rapide pour C(x), mais les fonctions sont près pour x petit.

Parcours C : Qu'en est-il du paramètre b ? La forme canonique de la fonction exponentielle est $f(x) = aB^{b(x-h)} + k$, mais ...

Exemple 5 : Les représentations graphiques des fonctions $f(x) = 5(3)^{2(x+1)} + 7$ et $g(x) = 45(9)^x + 7$ sont identiques. Démontre que f et g sont en fait la même fonction.

$$\begin{aligned} f(x) = 5(3)^{2(x+1)}+7 &= 5(3)^{2x+2}+7 \\ &= 5(3)^{2x}\cdot 3^2+7 \\ &= 5\cdot(3^2)^x\cdot 9+7 \\ &= 5\cdot 9^x\cdot 9+7 \\ &= 45(9)^x+7 \quad = g(x) \end{aligned}$$

Donc $\Rightarrow f(x) = g(x)$

...on pourrait faire de même avec la forme canonique $f(x) = aB^{b(x-h)} + k$ pour démontrer que toutes les fonctions exponentielles peuvent être écrites à l'aide de la forme canonique $f(x) = aB^x + k$.

Devoir : Parcours B : Visions, pages 347 à 352, nos 1ab, 3ac, 5, 6ab, 10, 13, 16, 17, 18*

Parcours C : Visions, pages 347 à 352, nos 1abcf, 3abcf, 5, 6ab, 10, 13, 16, 17, 18*

*Question 18c) : Après combien de temps la personne aura-t-elle gagné son combat ?