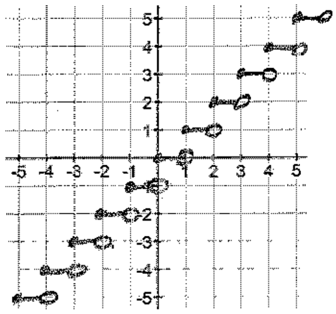
RAS 3.2 La fonction partie entière (Partie 1)

Soit f la fonction par partie définie de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \dots \\ 3 \; si \; 3 \leq x < 4 \\ 2 \; si \; 2 \leq x < 3 \\ 1 \; si \; 1 \leq x < 2 \\ 0 \; si \; 0 \leq x < 1 \\ -1 \; si \; -1 \leq x < 0 \\ -2 \; si \; -2 \leq x < -1 \\ -3 \; si \; -3 \leq x < -2 \\ \dots \end{cases}$$

Représente graphiquement cette fonction.



La fonction f associe tout nombre au plus grand nombre entier qui lui est inférieur ou égal. Un opérateur a été créé pour effectuer cette opération et il se nomme « partie entière ». La partie entière de x est noté $[x]$. Cette fonction porte aussi le nom de « fonction escalier ».

Exemple 1 : Évalue.

a) $[\sqrt{2}]$

$= [1,4142...]$

$= 1$

b) $[-\sqrt{2}]$

$= [-1,4142]$

$= -2$

c) $\left[\frac{-\pi}{[-\pi]}\right]$

$= \left[\frac{-3,14}{-4}\right]$

$= [0,785]$

$= 0$

d) $3\left[\frac{2^2-1}{-2}\right] + 1$

$= 3\left[\frac{3}{-2}\right] + 1$

$= 3(-2)+1$

$= -5$

Exemple 2 : Vrai ou faux?

$$[2x] = 2[x]$$

Faux, car $[2(\frac{1}{2})] \neq 2[\frac{1}{2}]$

$[1] \neq 2(0)$

$1 \neq 0$

Exemple 3 : Résous. $3[x+1] - 1 = 5$

$3[x+1] = 6$

$[x+1] = 2$

$-1 \quad -1 \quad -1$

$2 \leq x+1 < 3$

$1 \leq x < 2$

$\boxed{x \in [1, 2[}$

Exemple 4 : Une vendeuse au détail est rémunérée par commission avec un certain salaire de base. La règle reliant sa rémunération hebdomadaire, R(x) (en \$), au montant de ses ventes, x (en \$), est :

$$R(x) = 20\left[\frac{x}{150}\right] + 125$$

a) Quel est le salaire de la vendeuse si ses ventes s'élèvent à 2 500\$?
b) Quel montant a-t-elle vendu si son salaire hebdomadaire est de 325 \$?
c) Décris sa rémunération.
d) Pourquoi son salaire hebdomadaire ne peut-il pas être de 335\$?
e) Détermine la règle de R(x) si sa rémunération est maintenant déterminée par un salaire de base de 100 \$ avec une commission de 15\$ par tranche de 125\$.

a) $R(2500) = 20\left[\frac{2500}{150}\right] + 125$

$= 20\left[16,66\ldots\right] + 125$

$= 20(16) + 125$

$= \boxed{445\,\$}$

b) $325 = 20\left[\frac{x}{150}\right] + 125$

$200 = 20\left[\frac{x}{150}\right]$

$10 = \left[\frac{x}{150}\right]$

$10 \leq \frac{x}{150} < 11 \quad \times 150$

$\boxed{1500\,\$ \leq x < 1650\,\$}$

c) Salaire de base de 125\$ avec une commission de 20\$ par tranche de 150\$ de vente.

d) $335 = 20\left[\frac{x}{150}\right] + 125$

$\left[\frac{x}{150}\right] = \frac{335 - 125}{2}$

$\left[\frac{x}{150}\right] = 10,5$

N'est pas un entier

e) $R(x) = 15\left[\frac{x}{125}\right] + 100$

Devoir : Parcours C : Visions, pages 43 à 49, nos 1, 2, 7, 14 et feuille de travail 1

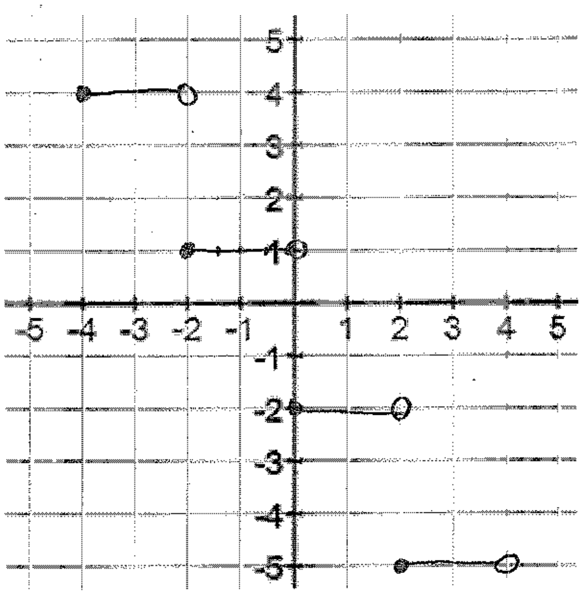
RAS 3.2 La fonction partie entière (Partie 2)

Rappel : Au cours précédent, nous avons tracé le graphique de la fonction partie entière $f(x) = [x]$, aussi appelée fonction escalier.

Exemple 1 : Complète les tables de valeur suivantes et trace le graphique de chaque fonction.

a) $f(x) = -3\left[\frac{1}{2}(x+2)\right] + 1$

x	f(x)
-2	1
-1.5	1
-1	1
-0,5	1
0	-2
0,5	-2
1	-2

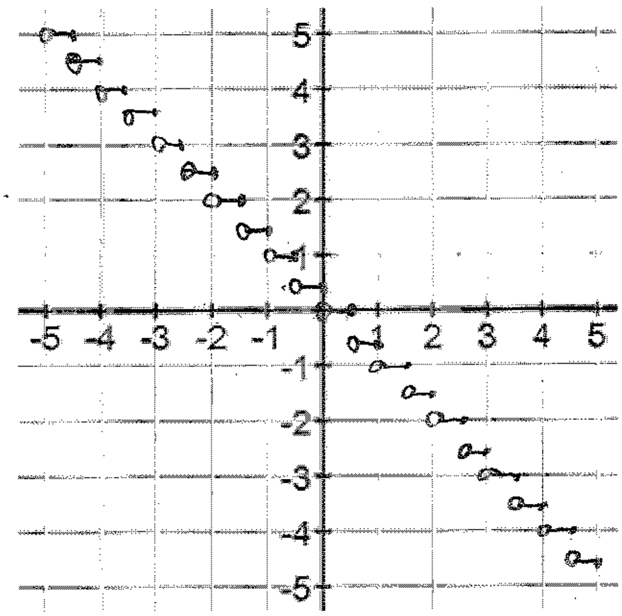


Propriété	Solution
D_f	$x \in \mathbb{R}$
I_f	$\{y \mid y = 3n+1,\ n \in \mathbb{Z}\}$
Les racines	$\varnothing$
Les intervalles où la fonction est positive	$x \in]-\infty, 0[$
f(x) = -2	$x \in [0, 2[$

$\ldots, -5, -2, 1, 4, \ldots$

b) $f(x) = \frac{1}{2}[-2x] + \frac{1}{2}$

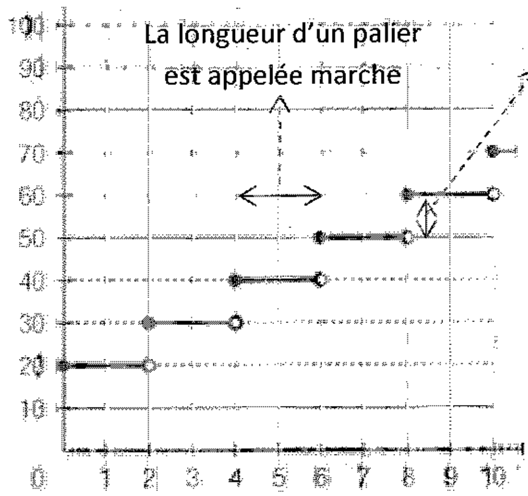
x	f(x)
-2	2,5
-1.5	2
-1	1,5
-0,5	1
0	0,5
0,5	0
1	-0,5



Propriété	Solution
D_f	$x \in \mathbb{R}$
I_f	$\{y \mid y = n/2,\ n \in \mathbb{Z}\}$
Les racines	$x \in]0, 1/2]$
Les intervalles où la fonction est positive	$x \in]-\infty, 1/2]$

$\ldots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \ldots$

La forme canonique de la fonction partie entière est $f(x) = a[b(x-h)] + k$



La distance verticale entre deux paliers est appelée contremarche

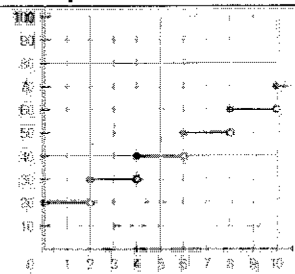
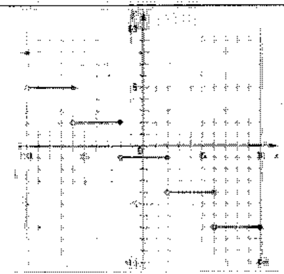
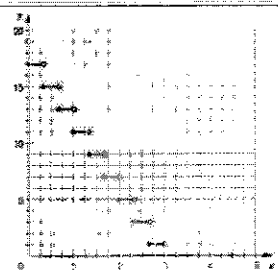
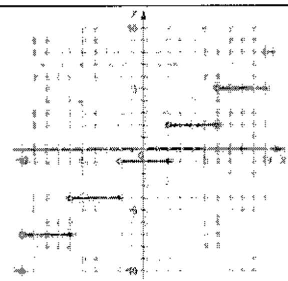
La longueur de la marche est donnée par $\frac{1}{|b|}$.
La longueur de la contremarche est donnée par $|a|$.
Le point (h, k) est toujours un point appartenant au graphique de la fonction et est située à une extrémité de la marche.
Comme à l'habitude, si le paramètre a est négatif, il y a réflexion verticale ; pour le paramètre b négatif, la réflexion est horizontale.

$b - \Rightarrow$ ○—●

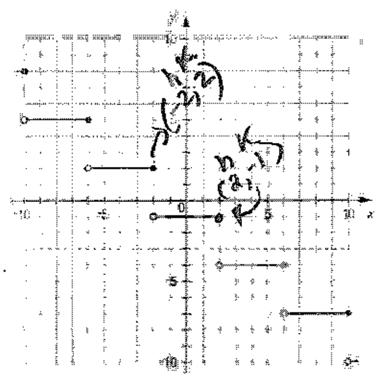
$b + \Rightarrow$ ●—○

(a) x (b) → croissant (Produit +)
→ décroissant (Produit −)

Complète le tableau suivant.

Signe du paramètre a	Signe du paramètre b	Graphique de la fonction partie entière
+	+	
+	−	
−	+	
−	−	

Exemple 2. Détermine la règle de la fonction partie entière représentée graphiquement ci-dessous.



$y = a[b(x-h)]+k$

$\frac{1}{|b|} = 4$

$|b| = \frac{1}{4}$

$b = -\frac{1}{4}$

$|a| = 3$

$a = 3$

$\boxed{y = 3\left[\frac{-1}{4}(x-2)\right]-1}$

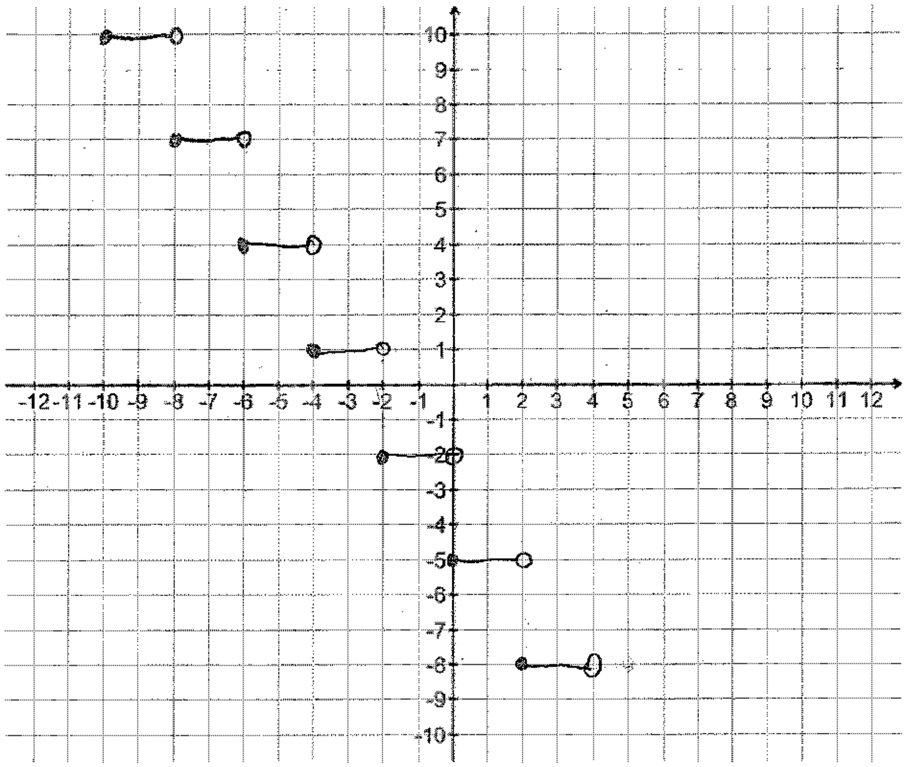
ou

$\boxed{y = 3\left[\frac{-1}{4}(x+2)\right]+2}$

ou

...

Exemple 3 : Trace le graphique de $f(x) = -3\left[\frac{x}{2} + 1\right] - 2$.



$y = a[b(x-h)] + k$

$y = -3\left[\frac{1}{2}(x+2)\right] - 2$

$a = -3$

$b = 1/2$

$h = -2$

$k = -2$

$\frac{1}{|1/2|} = 2$

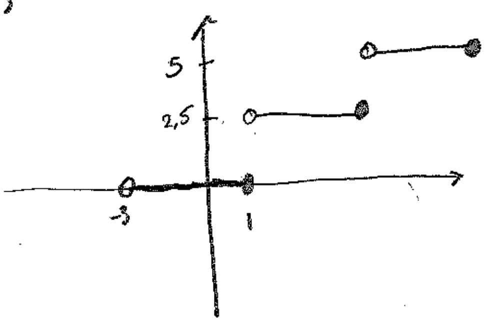
Devoir : Parcours C : Visions pages 43-49, nos 4ae, 6, 7, 8, 9d, 10a, 11, 13, 20 et le problème suivant :

À toi de jouer

~~Exemple 4~~ : Détermine la règle de la fonction partie entière qui possède les caractéristiques suivantes :

$0, 2{,}5, 5, 7{,}5, 10$

- Image : $\{2{,}5n, n \in N\}$
- Racines : $]-3, 1]$
- f(10) > f(3)



$\frac{1}{|b|} = 4$

$b = -\frac{1}{4}$

$(h,k) = (1,0)$

$a = -2{,}5$

$f(x) = a[b(x-h)] + k$

$\boxed{f(x) = -2{,}5\left[-\frac{1}{4}(x-1)\right]}$

$f(10) = -2{,}5\left[-\frac{1}{4}(10-1)\right]$
$= -2{,}5\left[-9/4\right]$
$= 7{,}5$

$f(3) = -2{,}5\left[-\frac{1}{4}(3-1)\right]$
$= -2{,}5[-0{,}5]$
$= 2{,}5$

✓