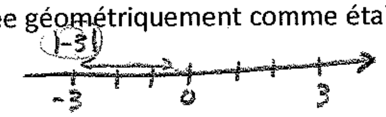
RAS 3.2 La fonction valeur absolue. (Partie 1)

Cours 1

La valeur absolue d'un nombre x, notée |x|, peut être interprétée géométriquement comme était la distance entre le nombre x et 0 sur une droite numérique.



Par définition, on a que $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$. Ainsi, on peut voir la fonction valeur absolue comme étant une fonction définie par partie.

Les valeurs absolues ont certaines propriétés :

Propriété	Exemple
$\lvert a\rvert \geq 0$	$\lvert -3{,}5\rvert \geq 0$, car $3{,}5 \geq 0$
$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert 16\rvert = \lvert -16\rvert = 16$
$\lvert a \times b\rvert = \lvert a\rvert \times \lvert b\rvert$	$\lvert 6 \times -4\rvert = \lvert 6\rvert \times \lvert -4\rvert = 6 \times 4 = 24$
$\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$, où $b \neq 0$	$\left\lvert \frac{-32}{8}\right\rvert = \frac{\lvert -32\rvert}{\lvert 8\rvert} = \frac{32}{8} = 4$

Exemple 1 : Évalue

a) $|3-7| - 3|-2-7|$

$|-4| - 3|-9|$

$4 - 3(9)$

$4 - 27$

-23

b) $-3\left|\frac{5-7}{10-4}\right| + |-3||2|$

$-3\left|\frac{-2}{6}\right| + (3)(2)$

$-3\left(\frac{1}{3}\right) + 6$

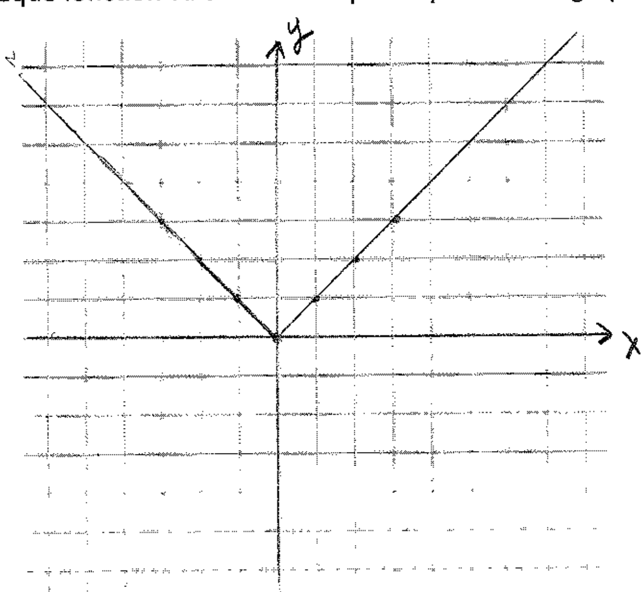
$-1 + 6$

5

Exemple 2 : Complète la table de valeur pour chaque fonction valeur absolue puis représente-la graphiquement.

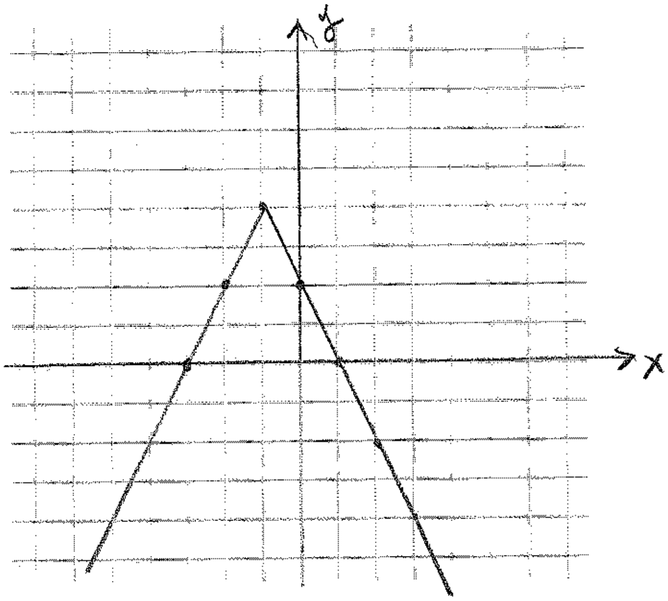
a) $y = |x|$

x	y
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3



b) $y = -2|x+1| + 4$

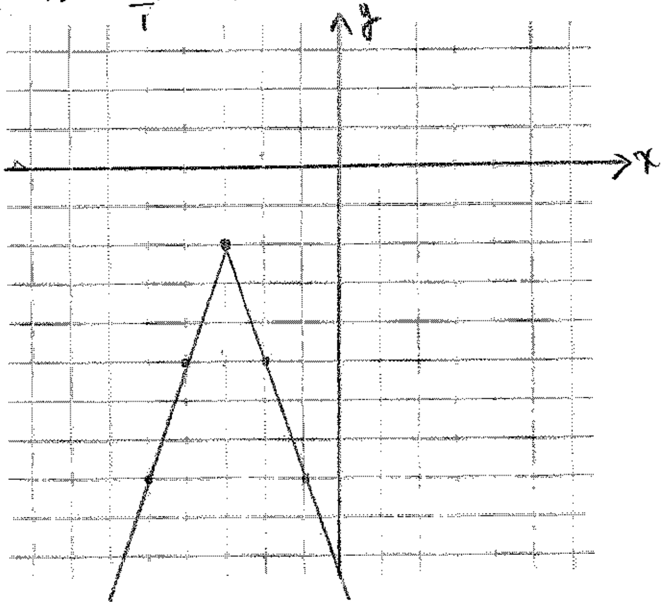
x	y
-3	0
-2	2
-1	4
0	2
1	0
2	-2
3	-4



La forme canonique d'une fonction valeur absolue est $y = a|b(x-h)| + k$. Par contre, à l'aide des propriétés de la fonction valeur absolue, on peut ramener cela à $y = a|x-h| + k$. On constate que le sommet de la fonction est (h, k) et que la pente de la droite à la droite du sommet est a.

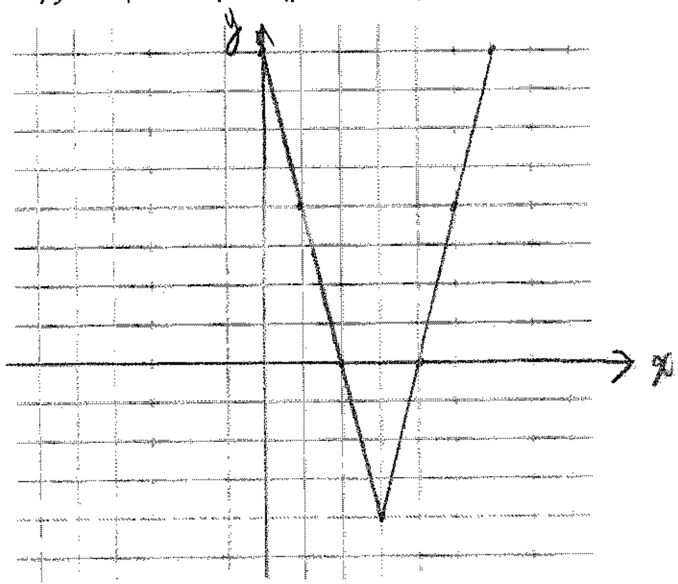
Exemple 3 : Trace les graphiques des fonctions valeur absolue suivantes.

a) $y = -3|x+3| - 2$ sommet → (h,k) → (-3,-2)



b) $y = 2|6-2x| - 4$ (parcours C) → $y = 2|-2(x-3)| - 4$

$y = 4|x-3| - 4$



Devoir : Parcours B : Visions, pages 29-36, nos 1ae, 2abc, 4a (1 à 8)

Compléter **À toi de jouer!** ~~no 1 et 2ab ci-dessous.~~

Parcours C : Visions, pages 29-36, nos 1ae, 2ade, 4a (1 à 8), 5cde

Compléter **À toi de jouer!** ~~no 1 et 2abc ci-dessous.~~

À toi de jouer!

1. Pour chaque fonction, trace son graphique et indique chacune de ses propriétés dans le tableau ci-dessous.

	$f(x) = \|x-3\| - 5$	$f(x) = 1 + \|x+2\|$	$f(x) = -\frac{1}{2}\|x-2\| + 4$
Domaine	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$
Image	$y \in [-5, \infty[$	$y \in [1, \infty[$	$y \in]-\infty, 4]$
Sens de l'ouverture	haut	haut	bas
Sommet	$(3, -5)$	$(-2, 1)$	$(2, 4)$
Racines	-2 et 8	Aucune	-6 et 10
Intervalle où f est strictement positive	$x \in]-\infty, -2[\cup]8, \infty[$	$x \in \mathbb{R}$	$x \in]-6, 10[$
Intervalle où f est strictement négative	$x \in]-2, 8[$	$\emptyset$	$x \in]-\infty, -6[\cup]10, \infty[$
Intervalle de croissance	$x \in [3, \infty[$	$x \in [-2, \infty[$	$x \in]-\infty, 2]$
Intervalle de décroissance	$x \in]-\infty, 3]$	$x \in]-\infty, 2]$	$x \in [2, \infty[$

Cours 2

RAPPEL : Par définition, on a que $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$.

Exemple 4: Écris les expressions suivantes sans le symbole de valeur absolue.

a) $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{si } x-3<0 \end{cases}$

$= \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{si } x<3 \end{cases}$

b) $|1-2x|$ (Parcours C)

$= \begin{cases} 1-2x & \text{si } 1-2x \geq 0 \\ -(1-2x) & \text{si } 1-2x<0 \end{cases}$

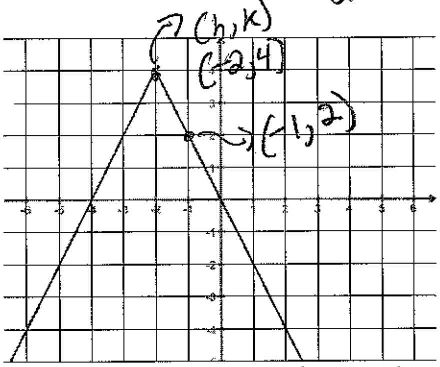
$= \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leq 1/2 \\ -1+2x & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$

Exemple 5 : Détermine la règle de la fonction valeur absolue représentée graphiquement ci-dessous.

a) $y = a|x+2|+4$

$2 = a|-1+2|+4$

$a=-2$



$\Rightarrow y = -2|x+2|+4$

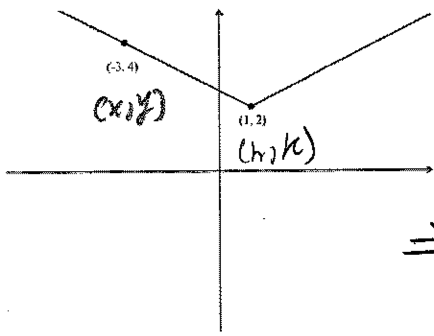
b) $y = a|x-1|+2$

$4 = a|-3-1|+2$

$4 = 4a+2$

$2 = 4a$

$a = 1/2$



$\Rightarrow y = \frac{1}{2}|x-1|+2$

Exemple 6 : Écris fonction valeur absolue $f(x) = -2|x+2|-3$ comme étant une fonction définie par partie. (Parcours C)

$f(x) = \begin{cases} -2(x+2)-3 & \text{si } x+2 \geq 0 \\ -2(-x-2)-3 & \text{si } x+2<0 \end{cases}$

$= \begin{cases} -2x-4-3 & \text{si } x \geq -2 \\ 2x+4-3 & \text{si } x<-2 \end{cases}$

$= \begin{cases} -2x-7 & \text{si } x \geq -2 \\ 2x+1 & \text{si } x<-2 \end{cases}$

Devoir : Parcours B : **À toi de jouer!** nos 1ab et 2ab
Visions : pages 29-36, nos 3ab, 9a, 12a,
Parcours C : **À toi de jouer!** nos 1abc et 2abc
Visions : pages 29-36, nos 3ab, 9ac, 12a, 13, 14, 19ad, 20

À toi de jouer!

1. Écris sans le symbole de la valeur absolue

a) $|x+2|$

$$=\begin{cases} x+2 & \text{si } x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & \text{si } x+2 < 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

b) $2|x-4|$

$$=\begin{cases} 2(x-4) & \text{si } x-4 \geq 0 \\ 2(-x+4) & \text{si } x-4 < 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 2x-8 & \text{si } x \geq 4 \\ -2x+8 & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

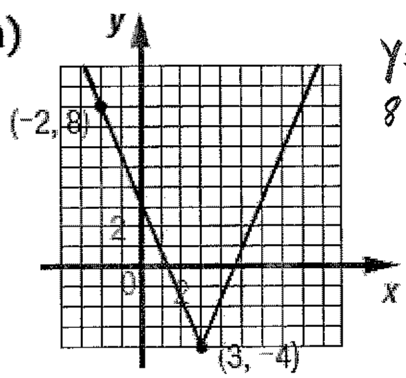
c) $-3|2-3x|+2$

$$=\begin{cases} -3(2-3x)+2 & \text{si } 2-3x \geq 0 \\ -3(-2+3x)+2 & \text{si } 2-3x < 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -6+9x+2 & \text{si } x \leq 2/3 \\ 6-9x+2 & \text{si } x > 2/3 \end{cases} \quad =\begin{cases} 9x-4 & \text{si } x \leq 2/3 \\ -9x+6 & \text{si } x > 2/3 \end{cases}$$

2. Trouve la règle de la fonction valeur absolue représentée graphiquement ci-dessous.

a)



$y = a|x-3|-4$

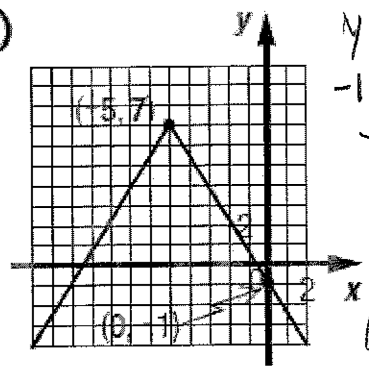
$8 = a|-2-3|-4$

$12 = 5a$

$a = \frac{12}{5}$

$\boxed{y = \frac{12}{5}|x-3|-4}$

b)



$y = a|x+5|+7$

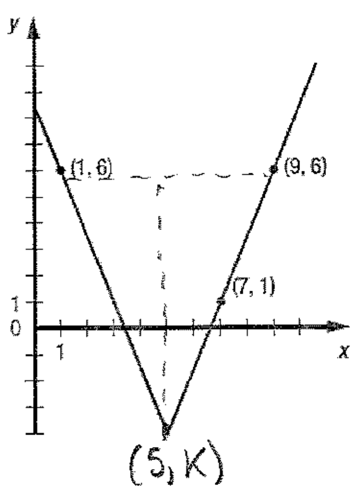
$-1 = a|0+5|+7$

$-8 = 5a$

$a = \frac{-8}{5}$

$\boxed{y = \frac{-8}{5}|x+5|+7}$

c)



$y = a|x-5|+k$

$1 = a|7-5|+k$

$1 = 2a+k$

$+ \; -6 = -4a-k$

$-5 = -2a$

$a = 5/2$

$6 = a|9-5|+k$

$(6 = 4a+k) \times -1$

remplace $1 = 2a+k$

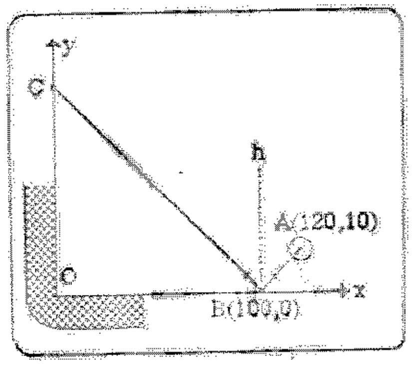
$1 = 2\left(\frac{5}{2}\right)+k$

$k = -4$

$\rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2}|x-5|-4}$

Cours 3

Exemple 7 : Une balle, frappée au point A(120,10), rebondit sur le rebord de la table de billard au point B (100,0) et atteint le rebord perpendiculaire de la table en un point C. Sachant que $\angle ABh = \angle hBC$, quelle équation exprime la trajectoire de la balle sur le trajet ABC?



$y = a\,|x-h| + k$

$10 = a\,|120-100| + 0$

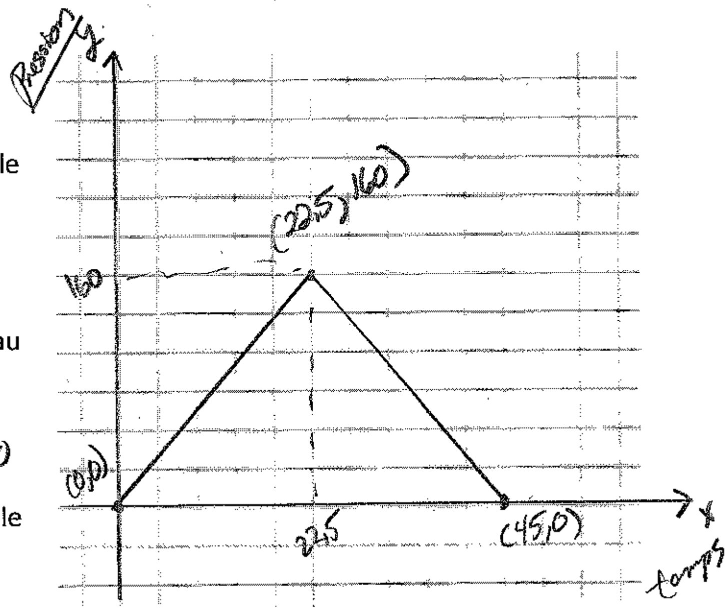
$10 = 20a$

$a = 1/2$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}|x-100|}$

Exemple 8 : Un tensiomètre est un appareil médical qui sert à mesurer la tension artérielle. Pour évaluer la tension artérielle d'un patient, on peut enrouler un brassard autour d'un de ses biceps, puis un tensiomètre automatique gonfle ce brassard avec un débit constant et en fait ainsi passer la pression de 0 à 160 mmHg. Immédiatement après, e brassage se dégonfle au même débit constant jusqu'à ce que la pression retombe à 0 mmHg. Le gonflement et le dégonflement du brassard prennent en tout 45 secondes.

a) Fais un croquis du graphique reliant la pression du brassard en fonction du temps nécessaire au gonflement et au dégonflement.



b) Après combien de temps la pression du brassard est-elle maximale ?

22,5 sec.

c) Quelle est l'équation reliant la pression du brassard au temps écoulé depuis le début de son gonflement ?

$y = a\,|x-22{,}5| + 160$ $\quad a = -7{,}1$

$0 = a\,|45-22{,}5| + 160$ $\quad \Rightarrow y = -7{,}1\,|x-22{,}5| + 160$

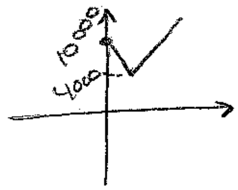
d) Quelle était la pression du brassard 10 secondes après le début de son gonflement?

$y = -7{,}1\,|10-22{,}5| + 160$

$y = 71{,}25$ mmHg

Exemple 9 : Ashley est la personne responsable de l'entretien du réservoir d'eau potable pour sa municipalité. La semaine prochaine, elle devra coordonner une opération qui vise à vider une partie du réservoir pour ensuite le remplir à nouveau. Elle doit trouver la fonction valeur absolue qui modélise la quantité d'eau dans le réservoir en fonction du temps ($Q(t) = a|t - c| + d$).

Ashley a contacté Justin, l'employé de la ville voisine qui occupe le même poste, afin d'avoir le rapport sur le même genre d'opération sur le réservoir d'eau. Dans le rapport de Justin, la fonction qui représente la quantité d'eau restante dans le réservoir, Q(t), (en m^3) en fonction du temps depuis le début de l'opération, t (en heures) est $Q(t) = 750|t-8| + 4000$



a) Quelle était la quantité d'eau initiale dans ce réservoir ?

$Q(0) = 750|0-8| + 4000$

$= \boxed{10\,000 \text{ m}^3}$

b) Quel pourcentage d'eau a été enlevé du réservoir ?

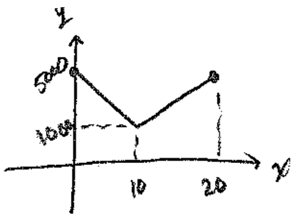
$10\,000 - 4000 = 6000$

$\frac{6000}{10000} = \boxed{60\,\%}$

c) Combien de temps a duré l'opération ?

$\boxed{16 \text{ heures}}$

d) (Parcours C) Le réservoir contient présentement 5 000 m^3 d'eau et on veut enlever 80 % de cette quantité. Selon les experts consultés par Ashley, l'opération complète (c'est-à-dire d'enlever 80 % de l'eau pour ensuite remplir le réservoir à 5 000 m^3 à nouveau) prendra un total de 20 heures. Ashley doit donc définir la fonction qui liera la quantité d'eau restante dans le réservoir, y, (en m^3) et le temps depuis le début de l'opération, x (en heures). Le débit de l'eau sera le même lorsque le réservoir se videra et lorsqu'il se remplira. **Quelle est la fonction qui représente cette situation ?** 80% de 5000 = 4000



$y = a|x-10| + 1000$

$5000 = a|0-10| + 1000$

$4000 = 10a$

$a = 400$

$\Rightarrow y = 400|x-10| + 1000$

e) (Parcours C)Quel réservoir avait le plus gros débit, celui de la ville d'Ashley ou celui de la ville de Justin ?

400 m^3/h

$\boxed{750 \text{ m}^3/h}$

Devoir : Parcours B : Feuille de travail partie 3, nos 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10

Parcours C : Feuille de travail partie 3, nos 1-10