Introduction aux matrices

Les matrices sont en quelque sorte des tableaux avec des colonnes, des rangées (lignes) et des éléments. On définit donc **une matrice comme étant un tableau rectangulaire de nombres**. La notation matricielle utilise des crochets ou des parenthèses (les crochets sont les plus utilisés). Une matrice est normalement identifiée par une lettre majuscule.

Voici un tableau représentant le nombre de pizzas vendues dans une semaine.

	9″	**12″**	**15″**
Ordinaire	42	108	92
Toute garnie	28	76	83

Ce tableau peut être transformé en la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 42 & 108 & 92 \\ 28 & 76 & 83 \end{bmatrix}$$

Chaque nombre de cette matrice est un **élément**.

La **dimension** d'une matrice est **m sur n** où **m** représente le nombre de **rangées** et **n** représente le nombre de **colonnes**.

La matrice A est de dimensions 2 sur 3.

Si on regarde la 2^e colonne, on retrouve les pizzas de 12″ ordinaires et toute garnie.

$$\textit{matrice colonne} \begin{bmatrix} 108 \\ 76 \end{bmatrix}$$

Si on regarde la 1ère rangée, on retrouve les pizzas ordinaires de 9", de 12" et de 15" vendues.

$$\textit{matrice rangée } \begin{bmatrix} 42 & 108 & 92 \end{bmatrix}$$

On peut se référer à chaque élément de la matrice par la notation

rangée

$$a_{ij} \text{ où } \left.\begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}\right\} i, j \in N$$

a pour matrice A colonne

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Lorsqu'une matrice est carrée, $m = n$, on peut définir sa **diagonale principale**.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

m_{11}, m_{22}, m_{33} et m_{44} sont les éléments qui composent la diagonale principale de M.

Une **matrice identité** I est une matrice carrée ayant 1 comme diagonale principale est des 0 partout ailleurs.

Ex: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Une **matrice transposée** est obtenue en transformant les lignes en colonnes et les colonnes en lignes. On peut donc dire si $A_{(m \times n)}$ alors $A^t_{(n \times m)}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Une matrice nulle, $0_{m \times n}$, est une matrice dont tous les éléments sont zéro (0).

$$O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Exemple 1</u>: Soit les matrices suivantes.

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ \sqrt{2} & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & y & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Quelles sont les dimensions de la matrice B ?

2×3

b) Dans la matrice B, identifie les éléments b_{23} et b_{12}.

9 et 2

c) Si $b_{ij} = 9$, quelles sont les valeurs de i et de j ?

2 et 3

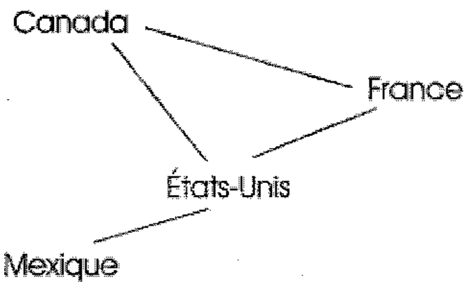
d) Explique pourquoi la matrice B n'est pas égale à la matrice E.

Car chacun des éléments ne sont pas égaux. En plus, ils n'ont pas les mêmes dimensions.

e) Explique pourquoi il n'existe aucune valeur de x ou de y qui pourrait faire égaler les matrices D et E.

Car la 3e rangée n'ont pas les mêmes éléments dans la même ordre.

Exemple 2 : Le diagramme suivant représente le réseau de communication existant dans le système informatique d'une compagnie. Le schéma montre que la compagnie possède 4 centres de distribution et les ligne entre les pays indiquent quels centres communiquent entre eux. Crée une matrice pour illustrer la communication directe qui existe entre les centres des différents pays.



$$\begin{array}{c} \\ \text{Canada} \\ \text{États-Unis} \\ \text{Mexique} \\ \text{France} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Canada} & \text{États-Unis} & \text{Mexique} & \text{France} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Devoir : Parcours B et C : Cahier de matrices, pages 9-11, nos 1, 2, 4a, 5b, 6c, 7ac, 8, 10, 12, 13, 14, pages 14-15, nos 1,3,4

Addition, soustraction et multiplications des matrices.

On peut additionner ou soustraire deux matrices si et seulement si elles sont de mêmes dimensions. Pour additionner (soustraire) deux matrices, on additionne (soustrait) leurs éléments correspondants. La somme et la différence de deux matrices A et B ont la même dimension que A et B.

La multiplication de chaque élément d'une matrice par le même nombre réel s'appelle la **multiplication scalaire** d'une matrice. Le nombre réel se nomme **scalaire**.

Exemple : Étant donné $A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$,

détermine ...

a) $3A$ b) $2A + 3B$ c) $C - A$ d) $B - A$

a) $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

b) $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 18 & 23 \end{bmatrix}$

c) $C - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} =$ N'est pas possible car n'ont pas les même dimensions.

d) $B - A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Devoir : Parcours B et C : Cahier de matrices, pages 26-27, no 1 cdeh

Deux matrices peuvent être multipliées ensemble **si et seulement si** le nombre de <u>colonnes de la première</u> matrice est identique au nombre de rangées de la deuxième matrice. Autrement dit, la multiplication de A par B est possible uniquement si les dimensions de A sont $(m \times n)$ et celles de B $(n \times p)$. Les dimensions de la nouvelle matrice seront $(m \times p)$. Par contre, si m≠p, le produit BA est impossible

Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $C = AB$.

impossible car $A_{2\times 3}$ et $B_{2\times 2}$

b) Calcule $C = BA$.

Dimensions : $B_{2\times 2}$ et $A_{2\times 3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Pour calculer l'élément c_{11}, on doit utiliser les données de la $1^{\text{ère}}$ rangée de B et celles de la $1^{\text{ère}}$ colonne de A.

$$c_{11} = b_{11} \times a_{11} + b_{12} \times a_{21}$$

$$c_{11} = (2)(6) + (1)(8)$$

$$c_{11} = 20$$

b) (Suite) Calcule $C = BA$.

Dimensions : $B_{2\times\boxed{2}}$ et $A_{\boxed{2}\times 3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times6)+(1\times8) & (2\times5)+(1\times-2) & (2\times7)+(1\times0) \\ (3\times6)+(-1\times8) & (3\times5)+(-1\times-2) & (3\times7)+(-1\times0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 8 & 14 \\ 10 & 17 & 21 \end{bmatrix}$$

Quelques propriétés des opérations sur les matrices

- En général, $AB \neq BA$.
- $AB = 0$ ne signifie pas que $A = 0$ ou $B = 0$.
- $AB = AC$ n'implique pas que $B = C$.

En ce qui concerne la matrice identité (I), elle est l'élément neutre en multiplication.

$$AI = IA = A$$

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ et I_3. Calcule AI.

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Devoir : Parcours B et C : Cahier de matrices, pages 27-30, nos 2bdef, 3de, 5abc, 6abc, 7, page 32, no 1e