Étudions le système d'équations $\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ 2x - 5y &= -1 \end{aligned}$.

Ce système peut facilement être résolu par substitution ou élimination.

On peut également représenter ce système de la façon suivante :

$$AX = B \text{ où } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ 2x - 5y &= -1 \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On cherche à isoler la matrice X. Puisque l'opération de division n'est pas admissible en algèbre matricielle, nous allons multiplier chaque membre par A^{-1}.

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A \qquad A^{-1} = \frac{1}{-17}\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$X = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ et } y = 1}$

Devoir : Cahier de matrices, page 49, nos 2acdg et le système

$$\begin{aligned} 12x + 9y &= 9 \\ 8x + 6y &= 6 \end{aligned}$$

2^e méthode : La matrice augmentée

Il existe 3 types d'opérations élémentaires qu'on peut effectuer sur les rangées d'une matrice.

- On peut changer 2 rangées de position dans une matrice.
- On peut multiplier chaque élément d'une rangée par un nombre réel non nul.
- On peut remplacer n'importe quelle rangée d'une matrice par la somme de cette rangée et d'un multiple scalaire d'une autre rangée.

Une **matrice augmentée** est une matrice obtenue à partir d'un système d'équations complet.

Exemple 1 : Résous le système d'équations à l'aide d'une matrice augmentée.

$3x + y = 7$

$2x - 5y = -1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 7 \\ 2 & -5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_1}{3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 2 & -5 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2}$$

$$-\frac{2}{3} - 5$$
$$-\frac{2}{3} - \frac{15}{3}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{17}{3} & -\frac{17}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{17}R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2+R_1}$$

$$-\frac{14}{3} - 1$$
$$-\frac{14}{3} - \frac{3}{3}$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ et } y = 1}$$

$$\Downarrow$$

$1x + 0y = 2$

$0x + 1y = 1$

Stratégies pour résoudre des systèmes d'équations à partir de la matrice augmentée.

1. Obtenir un 1 dans la 1ère colonne, 1ère rangée.

2. Obtenir des 0 pour le restant de la 1ère colonne.

3. Obtenir un 1 dans la 2e colonne, 2e rangée.

4. Obtenir des 0 dans le restant de la 2e colonne.

5. ... et ainsi de suite pour obtenir une matrice qui ressemble à ceci :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & p & q & r \\ 0 & 1 & s & t \\ 0 & 0 & 1 & u \end{array}\right]$$

6. Utiliser la dernière rangée pour obtenir des 0 dans la dernière colonne, sauf pour le 1.

7. Utiliser l'avant dernière rangée pour obtenir des 0 dans l'avant dernière colonne, sauf pour le 1.

8. ... et ainsi de suite pour obtenir une matrice qui ressemble à ceci :

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & u \end{array}\right]$$

Exemple 2 : Résous le système d'équations à l'aide d'une matrice augmentée.

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=7\right)\times 12 \rightarrow \quad 4x+3y+6z=84$$

$$\left(\frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=6\right)\times 6 \quad\quad x+3y+z=36$$

$$\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=9\right)\times 6 \quad\quad 2x+3y+3z=54$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 84 \\ 1 & 3 & 1 & 36 \\ 2 & 3 & 3 & 54 \end{array}\right] \; R_1 \leftrightarrow R_2 \; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 36 \\ 4 & 3 & 6 & 84 \\ 2 & 3 & 3 & 54 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 36 \\ 0 & -9 & 2 & -60 \\ 0 & -3 & 1 & -18 \end{array}\right] \; \frac{R_2}{-9} \; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 36 \\ 0 & 1 & -2/9 & 20/3 \\ 0 & -3 & 1 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3R_2+R_1 \\ 3R_2+R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 16 \\ 0 & 1 & -2/9 & 20/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2 \end{array}\right] \; 3R_3 \; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 16 \\ 0 & 1 & -2/9 & 20/3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{2}{9}R_3+R_2 \\ -\frac{5}{3}R_3+R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=6 \\ y=8 \\ z=6 \end{array}}$$

$\frac{6}{9}+1$

$\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{5}{3}$

$-20+36=16$

$-\frac{6}{9}+1$

$-\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=\frac{1}{3}$

$20-18$

$\frac{12}{9}+\frac{20}{3}$

$\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=\frac{24}{3}=8$

$-\frac{30}{3}+16$

$-10+16$

À toi de jouer!

~~Exemple 3~~ : Résous le système d'équations à l'aide d'une matrice augmentée.

$\frac{3}{4} + 3$ $\qquad$ $-\frac{33}{8} + 4$ $\qquad$ $\frac{121}{8} + -12$ $\qquad$ $-\frac{11}{4} + 9$

$\frac{3}{4} + \frac{12}{4} = \frac{15}{4}$ $\qquad$ $-\frac{33}{8} + \frac{32}{8} = -\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{121}{8} - \frac{96}{8} = \frac{25}{8}$ $\qquad$ $-\frac{11}{4} + \frac{36}{4} = \frac{25}{4}$

$$x + 3y + 4z = 3$$
$$4x + y + 4z = 21$$
$$2x - 2y - 3z = 8$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 21 \\ 2 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -11 & -12 & 9 \\ 0 & -8 & -11 & 2 \end{array}\right] \frac{R_3}{-8}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -11 & -12 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{11}{8} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] R_3 \leftrightarrow R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{11}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -11 & -12 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} 11R_2 + R_3 \\ -3R_2 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & \frac{11}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{25}{8} & \frac{25}{4} \end{array}\right] \frac{8}{25}R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & \frac{11}{8} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -\frac{11}{8}R_3 + R_2 \\ \frac{1}{8}R_3 + R_1 \end{array}$$

$-\frac{22}{8} + -\frac{1}{4} = -\frac{23}{4}$

$\frac{2}{8} + \frac{15}{4}$

$\frac{1}{4} + \frac{16}{4} = \frac{17}{4}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{23}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{17}{4} \\ y = -\frac{23}{4} \\ z = 2 \end{array}}$$

Devoir: Cahier de matrices, pages 62-63, nos 6bcdef, 7