RAS 1.3 Matrices inverses et déterminant

Les matrices qui satisfont la condition $DE = I$ ou $ED = I$ s'appellent des **matrices inverses**. D est l'inverse de E, noté E^{-1} ($D = E^{-1}$), et E est l'inverse de D ($E = D^{-1}$), noté D^{-1}.

Trouve le produit matriciel AB lorsque $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lien avec les nombres Réels

$3 \times \frac{1}{3} = 1$

↑ Inverse

Pour vérifier si deux matrices sont l'inverse l'une de l'autre, on les multiplie ensemble et on obtient une matrice identité.

Comment faire pour trouver l'inverse d'une matrice ?

1ère méthode

La première méthode consiste à remplacer les éléments de la matrice inverse par des variables et de résoudre le système d'équations afin d'obtenir les valeurs de ces variables.

Soit la matrice $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Trouve la matrice inverse C^{-1}.

$C \cdot C^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a - 3c & 2b - 3d \\ a + 4c & b + 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2a - 3c = 1$

$-2(a + 4c = 0)$

$\cancel{-2a} - 8c = 0$

$+ \cancel{2a} - 3c = 1$

$-11c = 1$

$c = \frac{-1}{11}$

$a + 4\left(\frac{-1}{11}\right) = 0$

$a = \frac{4}{11}$

$2b - 3d = 0$

$-2(b + 4d = 1)$

$\cancel{-2b} - 8d = -2$

$+ \cancel{2b} - 3d = 0$

$\frac{-11d}{-11} = \frac{-2}{-11}$

$d = \frac{2}{11}$

$b + 4\left(\frac{2}{11}\right) = 1$

$b = \frac{3}{11}$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

<u>2^e méthode</u>

La deuxième méthode consiste à utiliser le **déterminant** et la **matrice adjointe.**

Le **déterminant d'une matrice** carrée $A_{(2\times2)}$, détA, est obtenu en effectuant le produit des éléments trouvés dans la diagonale principale moins le produit des éléments de l'autre diagonale.

$$\text{dét}A = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21}$$

D'une manière plus pratique, si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alors $\text{dét}A = ad - bc$.

Une matrice carrée dont le déterminant égale 0 est dite **singulière**. Une matrice singulière est irréversible.

L'**adjointe d'une matrice** carrée $A_{(2\times2)}$, adjA, est obtenue de la manière suivante :

$$\text{si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ alors } \text{adj}A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Autrement dit, les éléments de la diagonale principale changent de position entre eux alors que ceux de l'autre diagonale changent de signes.

Voici comment calculer l'inverse d'une matrice à partir du déterminant et de la matrice adjointe.

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét}A}\,\text{adj}A$$

$\text{dét}H = (8\times6)-(4\times11)$
$= 4$

$\text{adj}H = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

Trouve la matrice inverse de $H = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$$H^{-1} = \frac{1}{\text{dét}H}\,\text{adj}H = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{4} & -\frac{11}{4} \\ -\frac{4}{4} & \frac{8}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = H^{-1}$$

Devoir : Parcours B et C : Cahier de matrices, pages 41-44, nos 1a, 3, 4b, 5, 6bgi, 7bef

Une application : Le codage de messages

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

Le message ci-dessous peut facilement être décodé à l'aide de la règle $A = 1, B = 2, C = 3, ..., Z = 26$.

3	15	4	5	6	1	3	9	12	5
c	o	d	e	f	a	c	i	l	e

Ce code est relativement facile à décoder. Pour rendre le décodage plus difficile en cas d'interception, on peut ...

- avoir ou inventer une matrice d'encodage E.
- exprimer les lettres du message sous forme de nombre avec la règle $A = 1, B = 2, C = 3, ..., Z = 26$.
- placer les nombres obtenus sous forme de matrice M. La matrice doit avoir une dimension qui lui permettra d'être multipliée à gauche par E.
- multiplier M à gauche par la matrice d'encodage E. Les nombres obtenus par cette multiplication forment le message codé C $(C = EM)$.

Pour décodé un message, on doit ...

- multiplier la matrice C à gauche par la matrice de décodage D.
- exprimer les nombres obtenus sous forme de lettres avec la règle utilisée.

Exemple 1 : Code le message « BONJOUR » à l'aide de la matrice d'encodage E.

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 15 & 14 & 10 \\ 15 & 21 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = EM$$

$$C = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 2 & 15 & 14 & 10 \\ 15 & 21 & 18 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$C = \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 66 & 129 & 114 & 30 \\ 19 & 51 & 46 & 20 \end{bmatrix}}$$

* Si le message a un nombre impair de lettres, on complète la matrice message M avec des zéros.

* Il est facile d'inventer une matrice d'encodage E.

Pour trouver la matrice de décodage D, il faut que $DE = I$, c'est-à-dire que la matrice d'encodage et la matrice de décodage soient l'inverse l'une de l'autre.

$$DE = I$$

$$D = E^{-1}$$

$$D = \frac{1}{\det E} \operatorname{adj} E$$

$$D = \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 4/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$DC = M$$

$$\begin{bmatrix} -1/5 & 4/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 66 & 129 & 114 & 30 \\ 19 & 51 & 46 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 15 & 14 & 10 \\ 15 & 21 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Bonjour

Exemple 2 : On a utilisé la matrice E pour encodé un message. Le résultat est présenté par la matrice C. Décode ce message.

$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 26 & 2 & 40 & 36 \\ 4 & -2 & 15 & 18 \end{bmatrix}$

$C = EM$

$DC = M$

$D = E^{-1}$

$D = \frac{1}{\det E} \operatorname{adj} E$

$D = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}} \underset{2\times8}{\begin{bmatrix} 26 & 2 & 40 & 36 \\ 4 & -2 & 15 & 18 \end{bmatrix}}$

$\underset{2\times8}{\begin{bmatrix} 13 & 1 & 20 & 18 \\ 9 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}}$

matrice