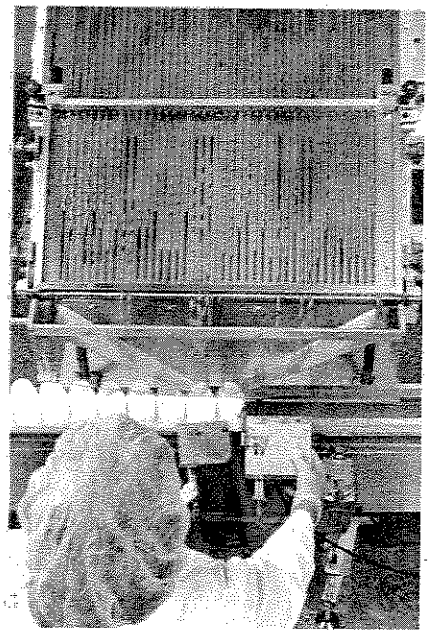
Feuille d'exercice B – (RAS 3.1 Propriétés d'une fonction)

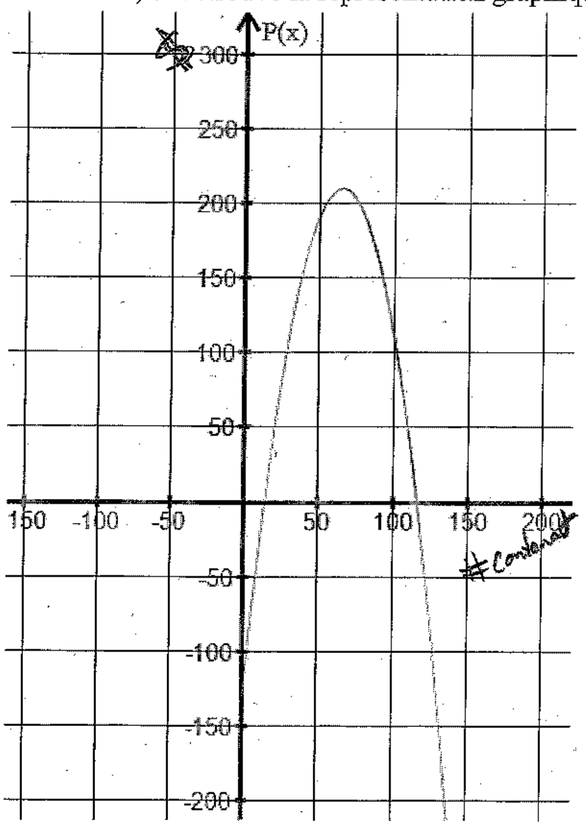
1. (Tiré du manuel Visions, p. 125) En économie, on dit qu'il y a une situation de monopole lorsqu'une entreprise est la seule à produire et à vendre un bien. Dans ce cas, l'entreprise cherchera généralement à produire uniquement la quantité de biens qui lui permet de maximiser son profit.
   Supposez, par exemple, qu'une entreprise pharmaceutique possède le monopole de la vente d'un médicament breveté. En tenant compte des coûts de production et de distribution, ainsi que de l'effet du prix sur la demande, un économiste a estimé que le profit réalisé par l'entreprise sur la vente de ce médicament pendant une certaine période de temps peut se traduire par la fonction suivante :

$$P(x) = -0{,}08(x-65)^2 + 210$$

   où x est la quantité produite en milliers de contenants et P(x), le profit en milliers de dollars.



Ci-dessous, on retrouve la représentation graphique de p(x).



a) Détermine les valeurs de P(25) P(125) et interprète-les selon le contexte.

b) En tenant compte du contexte, détermine le domaine de P(x).

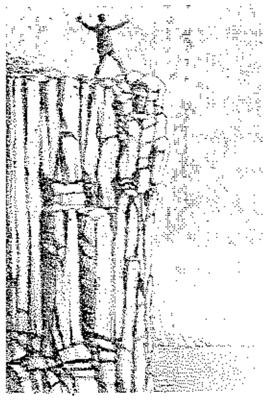
c) Quelle est l'ordonnée à l'origine de cette fonction. Que signifie cette valeur ?

d) Sers-toi du graphique afin d'estimer pour quelles quantités produites le profit sera nul.

e) Combien de contenants doivent être produits afin d'obtenir un profit maximal? Quel est ce profit maximal?

f) Si vous étiez un dirigeant l'entreprise, quelle option privilégieriez-vous : produire 50 000 contenants ou 80 000 contenants? Explique ton raisonnement.

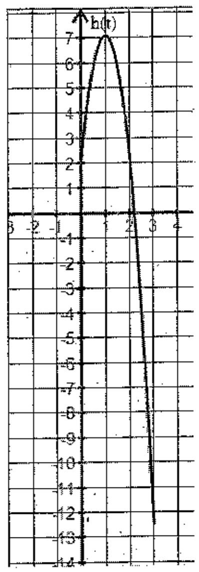
2. (Tiré du manuel Visions, p. 129) Patrice lance une pierre du sommet d'une falaise. La pierre monte d'abord, puis descend pour tomber dans la mer. La hauteur de la pierre pourrait s'exprimer par rapport au niveau de la mer, mais il est également possible de l'exprimer par rapport au sommet de la falaise, c'est-à-dire selon le point de vue de Patrice qui s'y trouve. Dans ce cas, la hauteur de la pierre (en m) est décrite par la fonction h dont la règle est :



$$h(t) = -4{,}9(t-1)^2 + 7{,}1$$

où t est le temps écoulé (en s).

Le plan cartésien ci-contre donne la représentation graphique de h(t).



a) En sachant que la balle frappe le ~~sol~~ mer après 3 s, détermine le domaine de h.
b) Détermine l'intervalle de croissance de h. Que représente-il selon le contexte ?
c) Quelle est la hauteur maximale de la pierre par rapport à la falaise?
d) Pourquoi la valeur initale de h n'est pas nulle ?
e) Dans quel intervalle de temps la pierre se trouve-t-elle plus basse que le sommet de la falaise ?
f) Quelle est la hauteur de la falaise par rapport au niveau de la mer?
g) Quelle est la règle de la fonction $h_2(t)$ donnant la hauteur de la pierre par rapport au niveau de la mer ?

3. Voici une fonction qui représente la trajectoire d'une fusée de feu d'artifice lancée lors de la compétition pyrotechnique Symphony of Fire ,$h(t) = -4{,}9(t-5)^2 + 124$, où *h(t)* est la hauteur de la fusée, en mètres, et *t*, le temps écoulé depuis le lancement de la fusée, en secondes.
a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la fusée ?
b) Combien de secondes après son lancement la fusée atteint-elle cette hauteur maximale?
c) À quelle hauteur au-dessus du lac la fusée se trouvait-elle au moment du lancement ?
d) Quel est l'intervalle de croissance de la fonction ?

4. L'équation suivante représente la hauteur d'un ballon de soccer, h(d), en mètres, en fonction de la distance horizontale, *d*, en mètres, que le ballon parcourt avant de toucher le sol.
$h(d) = -0{,}025(d-20)^2 + 10$
a) Quelle est la hauteur maximale du ballon ?
b) Quelle est la distance horizontale entre le ballon et la botteuse ou le botteur au moment où le ballon atteint sa hauteur maximale ?
c) Quelle est la hauteur initiale du ballon ?
d) Quelle distance horizontale le ballon parcourt-il entre le moment du botté et le moment où il touche le sol ?
e) Quelle est la hauteur du ballon lorsqu'il se trouve à une distance horizontale de 10 m par rapport à la botteuse ou au botteur ?
f) Si on faisait correspondre l'origine avec le sommet de la parabole, quelle serait l'équation de la courbe ?

5. Fais un diagramme sommaire de chaque parabole et indique

a) Le domaine b) L'image c) L'équation de l'axe de symétrie

d) Les zéros e) La valeur initiale f) Les intervalles où la fonction est croissante

g) Les intervalles où la fonction est strictement positive

h) Les intervalles où la fonction est négative i) La valeur maximale ou minimale

1. $y = 2(x-2)^2 - 2$

2. $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 2$

3. $y = 2x^2 + 2$

4. $y = -(x-2)^2$

5. $y = -x^2$

Feuille d'exercice 3,1 B (Corrigé)

#1. $P(x) = -0{,}08(x-65)^2+210$

a) $P(25) = -0{,}08\,(25-65)^2+210$
$P(25) = 82$

$P(125) = -0{,}08(125-65)^2+210$
$P(125) = -78$

Ces valeurs montrent que la production de 25000 contenants générera 82000 \$ de profit et que la production de 125000 contenants se traduira par une perte de 78000 \$.

b) $D_P : x \in [0, \infty[$

c) ord. à l'origine est -128 (en milliers de dollars) $\Rightarrow -128\,000\$$

$P(0) = -0{,}08(0-65)^2+210 = -128$
Cette valeur correspond à l'investissement nécessaire pour commencer à produire ce médicaments.

d) Le profit sera nul pour la production d'environ 13800 et 116200 contenant.

e) L'entreprise doit produire 65000 contenants pour réaliser un profit maximum de 210 000 \$.

f) $P(50) = -0{,}08\,(50-65)^2+210 = 192$
$P(80) = -0{,}08\,(80-65)^2+210 = 192$ $\Big\}$ 192 000\$

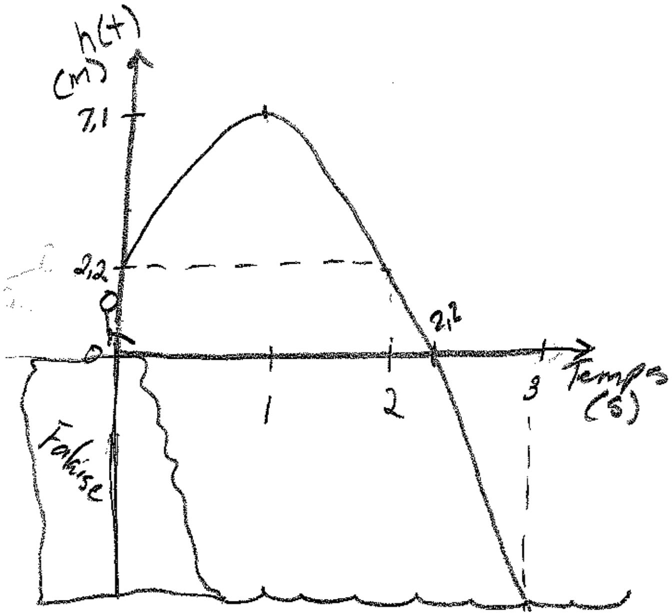
Il serait mieux de produire 50000 contenants, car nous obtenons le même profit avec moins de production. Donc, nous avons moins de matériaux à utiliser. C'est donc mieux pour l'environnement.

#2. $h(t) = -4{,}9\,(t-1)^2 + 7{,}1$

a) D_h: $x \in [0, 3]$ → le temps que prend la pierre à frapper le fond de la mer. (3 secondes)

b) $x \in [0, 1]$ qui représente le temps que la pierre a pris pour atteindre la hauteur maximale.

c) La hauteur maximale par rapport à la falaise est de 7,1 m.



d) Parce que Patrice lance la pierre du haut d'une falaise.

e) $0 = -4{,}9\,(t-1)^2 + 7{,}1$

$\frac{-7{,}1}{-4{,}9} = (t-1)^2$

$\pm\sqrt{1{,}5} = \sqrt{(t-1)^2}$

$\pm 1{,}2 = t - 1$

$1 \pm 1{,}2 = t$

$t = \cancel{-0{,}2}$ et $t = 2{,}2$

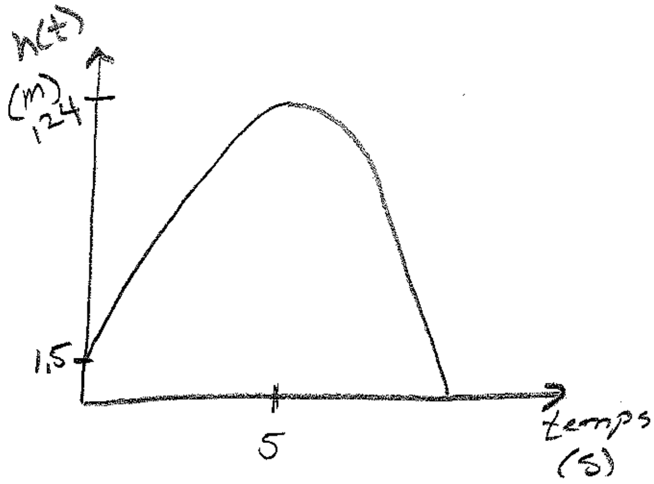
La pierre se trouve en bas de la falaise pour ≈1 seconde, c'est-à-dire sur l'intervalle de temps suivante :]2,2, 3]

f) La hauteur de la falaise par rapport au niveau de la mer est de 12,5 m.

$h(3) = -4{,}9\,(3-1)^2 + 7{,}1$

$h(3) = -12{,}5$

#3. $h(t) = -4{,}9\,(t-5)^2 + 124$



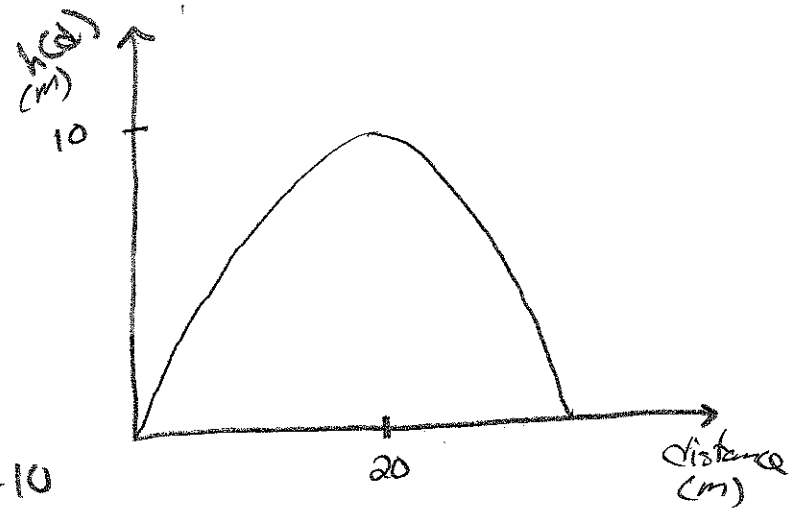
a) La hauteur maximale de la fusée est 124 m

b) La fusée a atteint sa hauteur maximale après 5 secondes.

c) 1,5 m

d) $x \in [0, 5]$

#4. $h(d) = -0{,}025(d-20)^2 + 10$



a) 10 m

b) 20 m

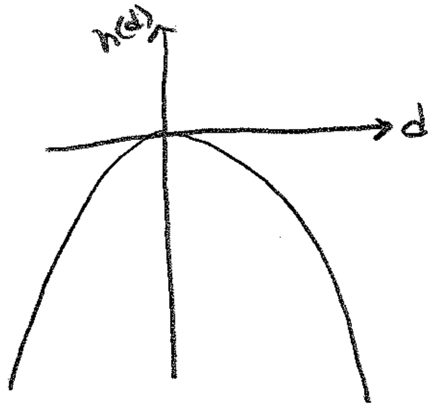
c) 0 m

d) 40 m

e) $h(10) = -0{,}025(10-20)^2 + 10$

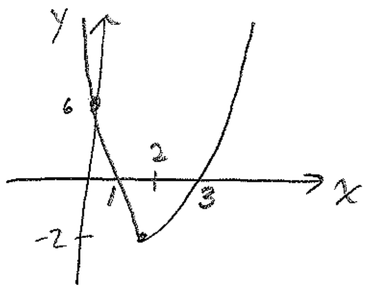
$h(10) = 7{,}5$ m

f)



$h(d) = -0{,}025 d^2$

#5. ① $y = 2(x-2)^2-2$



a) $x \in \mathbb{R}$

b) $y \in [-2, \infty[$

c) $x = 2$

d) $0 = 2(x-2)^2-2$

$2 = 2(x-2)^2$

$1 = (x-2)^2$

$\pm 1 = x-2$

$2 \pm 1 = x$

$x = 3$ et $x = 1$

e) 6

f) $x \in [2, \infty[$

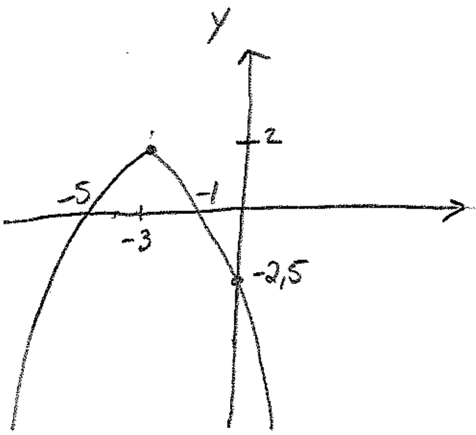
g) $x \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$

h) $x \in [1, 3]$

i) Min de -2

---

② $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2+2$



a) $x \in \mathbb{R}$

b) $y \in]-\infty, 2]$

c) $x = -3$

d) $0 = -\frac{1}{2}(x+3)^2+2$

$-2 = -\frac{1}{2}(x+3)^2$

$4 = (x+3)^2$

$\pm 2 = x+3$

$-3 \pm 2 = x$

$x = -5$ et $x = -1$

e) $-2,5$

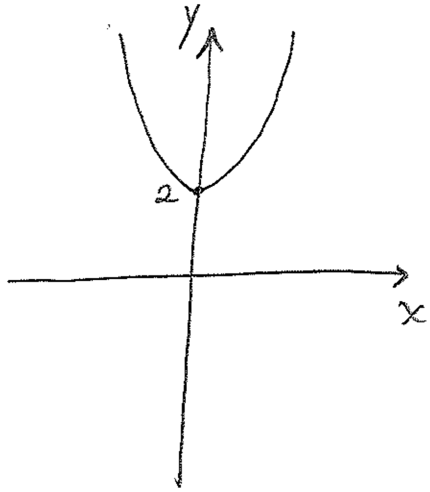
f) $x \in]-\infty, -3]$

g) $x \in]-5, -1[$

h) $x \in]-\infty, -5] \cup [-1, \infty[$

i) Max de 2

③ $y = 2x^2 + 2$



a) $x \in \mathbb{R}$

b) $y \in [2, \infty[$

c) $x = 0$

d) $\emptyset$

e) 2

f) $x \in [0, \infty[$

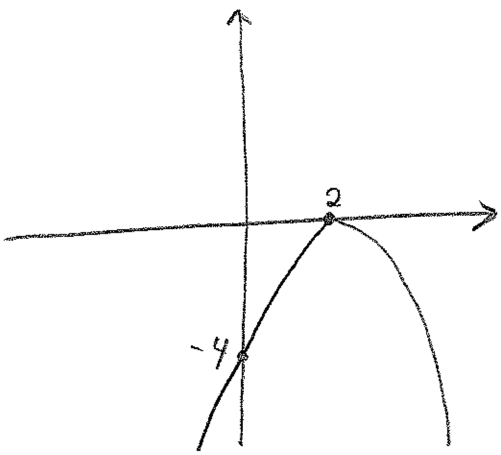
g) $x \in \mathbb{R}$

h) $\emptyset$

i) Min de 2

---

④ $y = -(x-2)^2$



a) $x \in \mathbb{R}$

b) $y \in]-\infty, 0]$

c) $x = 2$

d) 2

e) -4

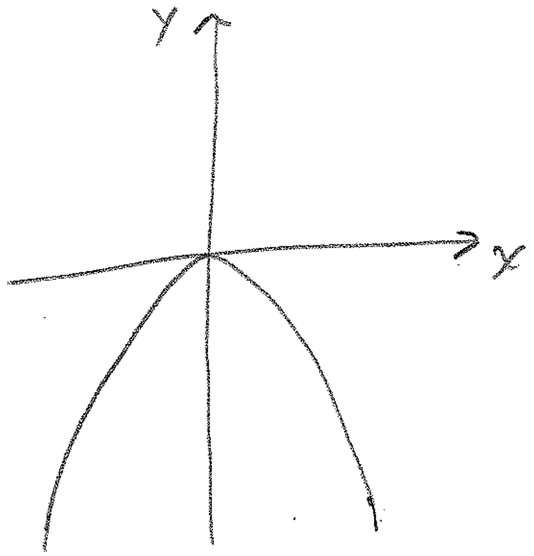
f) $x \in]-\infty, 2]$

g) $\emptyset$

h) $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in]-\infty, \infty[$

i) Max de 0

⑤ $y = -x^2$



a) $x \in \mathbb{R}$

b) $y \in]-\infty, 0]$

c) $x = 0$

d) 0

e) 0

f) $x \in]-\infty, 0]$

g) $\emptyset$

h) $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in]-\infty, \infty[$

i) Max de 0