Feuille de travail #1 (Omnimaths 12, pages 113-115) – RAS 3.8 (Résoudre des équations exponentielles)

Exercices

Trouve la valeur de x. Arrondis ta réponse au centième.

1. $3^x = 125$
2. $10^{x-4} = 7$
3. $4^{2x} = 15$
4. $9^{2x+3} = 568$
5. $(0{,}7)^{3x} = 2{,}08$
6. $2^{-x} = 6$
7. $8^{-\frac{x}{3}} = 20$
8. $2^{x^2} = 10$

Isole x dans l'équation. Arrondis ta réponse au centième.

9. $2^{x+3} = 17^x$
10. $17^{x+4} = 196^{3x-2}$
11. $21^{2x+5} = 278^{3x-7}$
12. $0{,}63^{x-4} = 5^{2x}$
13. $7 \times 2^x = 5^{x-2}$
14. $485 \times 5^{x+2} = 12^{2x-1}$

Estime la valeur de chaque énoncé. Ensuite, calcule-la et arrondis-la au centième.

15. $\log_3 88$
16. $\log_4 91$
17. $\log_5 1012$
18. $\log_6 250$
19. $\log_7 71$
20. $\log_8 567$

Isole x dans l'équation.

21. $\log_2 x = \log_2 5 + \log_2 3$
22. $\log_2 x = \log_2 18 - \log_2 6$
23. $\log x + \log 12 = \log 8$
24. $\log x = 1 + \log 2$
25. $4\log_5 x = \log_5 625$

On investit un montant d'argent à un taux d'intérêt de 12 % par année. Écris une équation qui représente le temps requis pour que les événements indiqués ci-dessous se produisent, puis résous-la. Arrondis ta réponse au dixième d'année.

26. Le montant initial double avec l'intérêt composé annuellement.

27. Le montant initial double avec l'intérêt composé mensuellement.

28. Le montant initial triple avec l'intérêt composé annuellement.

29. Le montant initial triple avec l'intérêt composé mensuellement.

On achète une photocopieuse pour 12 500 $. Chaque année, la valeur de l'appareil est égale à 85 % de sa valeur de l'année précédente.

30. Écris une équation exponentielle qui représente la valeur de la photocopieuse t années après son achat.

31. Dans combien de temps, au dixième d'année près, la photocopieuse vaudra-t-elle la moitié de sa valeur initiale ?

32. Dans combien de temps, au dixième d'année près, la photocopieuse vaudra-t-elle seulement 1 500 $?

Prouve chacune des identités suivantes
a) *à l'aide de fonctions exponentielles.*
b) *à l'aide des propriétés logarithmiques que tu connais déjà.*

33. $(\log_a x)(\log_x a) = 1$

34. $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \dfrac{\log_b x}{\log_b y}$

35. $(\log_a x)(\log_b a) = \log_b x$

36. $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

37. $\log_{b^n}(x^n) = \log_b x$

38. $\log_{\frac{1}{b}}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \log_b x$

39. Pour les preuves des questions 33 à 38, quelle méthode de preuve est la plus facile : celle de a) ou celle de b) ? Pourquoi, selon toi ?

Applications et résolution de problèmes

40. Trouve les racines de chaque équation. N'oublie pas de vérifier les restrictions et de rejeter les racines inadmissibles.

a) $\log_2(x-2)+\log_2 x=\log_2 3$

b) $\log_2(x-2)+\log_2 x=3$

c) $\log_5(3x+1)+\log_5(x-3)=3$

d) $\log_9(x-5)=1-\log_9(x+3)$

e) $\log_2(x^2+8)-\log_2 6=\log_2 x$

f) $\log(2x+1)=1+\log(x-2)$

g) $\log_3(x-2)+\log_3 10-\log_3(x^2+3x-10)=0$

h) $(\log_3 x)^2=\log_3 x^2+3$

41. Technologie Sers-toi de la formule du changement de base pour récrire $y=\log_4 x$ sous une forme qui te permet de représenter graphiquement la fonction à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique. Représente graphiquement la fonction. Explique comment tu pourrais utiliser la valeur de $x=4$ pour vérifier la validité de ton graphique. Quelle autre valeur de x serait utile ?

42. Intérêt Combien de temps faut-il, au mois près, pour qu'un placement de 12 500 $ atteigne 20 000 $ s'il produit 10 % d'intérêt composé mensuellement ?

43. Demi-vie Combien de temps faut-il pour que 20 mg d'iode 131 soit réduit à 16,85 mg, si la demi-vie de l'iode 131 est de 8,1 jours ?

44. Croissance bactérienne Le nombre de bactéries dans une culture est une fonction du temps selon la formule $P(t)=P_0(8)^{kt}$, où $P(t)$ représente la population de bactéries après t heures, P_0, la population initiale, t, le temps en heures et k, une constante qui dépend de la famille de bactéries.

a) S'il faut 3 heures à une population de bactéries pour passer de 20 à 3 200, quelle est la valeur de k, au centième près ?

b) Quelle que soit la valeur de P_0, combien de temps mettra cette population à tripler ? Arrondis ta réponse au centième.

c) S'il y a P_0 bactéries lors du compte initial, à quel moment y en avait-il la moitié de ce nombre ? Arrondis ta réponse au centième.

45. Fromage Un certain fromage se conserve pendant 140 heures à 0 °C et pendant 20 heures à 25 °C.

a) Écris une équation exponentielle qui représente le nombre d'heures pendant lequel le fromage se conservera en fonction du temps.

b) Pendant combien de temps ce fromage se conservera-t-il à 5 °C ? Arrondis ta réponse à l'heure.

46. Médecine Un des progrès importants de la médecine est la découverte et l'utilisation des radiotraceurs. Les radiotraceurs sont des nucléides radioactifs qu'on peut administrer par la bouche et dont on peut suivre le parcours à travers les organes du corps. Ils facilitent le diagnostic et le traitement de divers problèmes de santé.

a) On utilise l'iode 131 pour étudier la glande thyroïde. Un échantillon contient 20 mg d'iode 131. Deux jours plus tard, il en reste 16,85 mg. Quelle est la demi-vie de l'iode 131, au dixième près ?

b) On utilise le phosphore 32 pour étudier les yeux, le foie et les tumeurs. Après 10 jours, il reste seulement 154 mg d'un échantillon de 250 mg. Quelle est la demi-vie du phosphore 32, au dixième près ?

c) On utilise le strontium 87 pour étudier les os. Après 1 heure, il reste 78,1 mg d'un échantillon de 100 mg. Quelle est la demi-vie du strontium 87, au dixième près ?

d) On utilise le sodium 24 pour étudier le système circulatoire. Suppose qu'on en administre 500 unités à un patient. Quatre heures plus tard, on en détecte 414,6 unités dans son système. Quelle est la demi-vie du sodium 24, au dixième près ?

47. Radiation La contamination de l'environnement par le strontium 90, un déchet nucléaire, est très dangereuse pour la santé, car la chimie du strontium est semblable à celle du calcium. La demi-vie du strontium 90 est de 28,8 années. S'il pénètre dans l'herbe et le foin, il pénétrera aussi dans le lait de vache avec le calcium, puis dans les os des êtres humains. Étant donné que sa demi-vie est très longue, le strontium 90 peut provoquer des lésions par radiation qui peuvent causer un cancer.

a) Écris une fonction du temps qui représente la quantité de strontium 90 après t années.

b) Dans combien d'années restera-t-il seulement 10 % de la quantité initiale de strontium 90 ?

c) Quel pourcentage restera-t-il après cinq ans ?

d) Sans utiliser une calculatrice, détermine dans combien de temps il restera seulement 25 % de la quantité initiale de strontium 90.

48. Si $a>0$, $b>0$ et $a\neq 1$, $b\neq 1$, prouve que $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$.

49. Si $\log_a n = x$ et $\log_c n = y$, $n \neq 1$, prouve que $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{\log_b c - \log_b a}{\log_b c + \log_b a}$.

50. Si $L = \log_x yz$, $M = \log_y xz$, et $N = \log_z xy$, prouve que $L + M + N = LMN - 2$.

51. À l'aide des propriétés des logarithmes, montre que

$$\left(\log\frac{a}{b}\right)\left(\log\frac{c}{d}\right) = \left(\log\frac{a}{c}\right)\left(\log\frac{b}{d}\right) + \left(\log\frac{a}{d}\right)\left(\log\frac{c}{b}\right).$$

52. Bactérie Montre que

a) la relation $t \doteq 0{,}63H$ représente le temps de doublement d'une population de bactéries qui devient trois fois plus nombreuse toutes les H heures.

b) la relation $t \doteq 0{,}43H$ représente le temps de doublement d'une population de bactéries qui devient cinq fois plus nombreuse toutes les H heures.

c) la relation $t \doteq 0{,}301 \times \dfrac{H}{\log n}$ représente le temps de doublement d'une population de bactéries qui devient n fois plus nombreuse toutes les H heures.

53. Intensité de la lumière L'intensité de la lumière solaire sous la surface d'une rivière diminue de 4,6 % par mètre sous la surface. Montre que l'équation ci-dessous représente la profondeur atteinte par la lumière si l'intensité de la lumière est $I(p)$:

$p \doteq -48{,}9 \log \dfrac{I(p)}{I_0}$, où I_0 est l'intensité initiale et p, la profondeur en mètres.

54. Population de caribous La population de caribous d'une région augmente à un taux annuel de 2 %.

a) S'il y a 850 caribous présentement, dans combien de temps y en aura-t-il 1 000 ?

b) Dans combien de temps la population aura-t-elle doublé ?

c) S'il y a P_0 caribous présentement, montre que la relation suivante représente le temps, t, qu'il faudra pour que la population atteigne une valeur de $P(t)$:

$$t \doteq 116{,}28 \log \frac{P(t)}{P_0}$$

d) Sers-toi de la relation indiquée en c) pour déterminer combien de temps il faudra à une population de caribous pour passer de 900 à 1 400.

55. Accroissement de la population Soit un taux de croissance annuel de T%. Montre que la relation suivante représente le temps qu'il faudra à une population initiale de P_0 pour atteindre une valeur de $P(t)$:

$$t = \frac{1}{\log(1+T)} \log \frac{P(t)}{P_0}$$

56. On exprime une fonction exponentielle sous la forme $\log y = m \log x + b$ afin d'obtenir un graphique qui est linéaire. Trouve l'équation de la fonction originale.

57. Si $(2 \log b)^2 + 8(\log a)(\log b) = 0$, exprime b en fonction de a.

58. Montre que

$$2\log_a(x+y) = 2\log_a x + \log_a\left(1 + \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right).$$

59. Si $\log_a\left(1+\dfrac{1}{8}\right) = x$, $\log_a\left(1+\dfrac{1}{15}\right) = y$

et $\log_a\left(1+\dfrac{1}{24}\right) = z$, montre que

$$\log_a\left(1+\frac{1}{80}\right) = x - y - z.$$

60. Si $2 \log_8 x = A$, $\log_2 2x = B$ et $B - A = 4$, trouve la valeur de x.

61. Trouve la valeur de x si $\dfrac{7^x + 7^{-x}}{2} = t$.

62. Trouve la valeur de x.

a) $x = 25^{1 + \log_5 x}$

b) $8^{\log_2 x} - 25^{\log_5 x} = 4x - 4$

c) $\log_{36}(x-2) + \log_{36}(x+1) + \log_{36}(x-3) = 4^{-\frac{1}{2}}$

63. Trouve la valeur de x.
$\log_4(x+1) + \log_4 x = 2$

DÉFI NOMBRE

Quel est le reste de la division $5^{100} \div 7$?

Réponses :

Section 2.7, p. 113-115

Exercices **1.** 4,39 **2.** 4,85 **3.** 0,98 **4.** –0,06 **5.** –0,68 **6.** –2,58 **7.** –4,32 **8.** ±1,82 **9.** 0,972 **10.** 1,684 **11.** 5,060 **12.** 0,502 **13.** 5,637 **14.** 3,538

Les estimations peuvent varier pour 15.-20. **15.** 4 ; 4,08 **16.** 3,1 ; 3,25 **17.** 4,25 ; 4,30 **18.** 3,1 ; 3,08 **19.** 2,25 ; 2,19 **20.** 3,1 ; 3,05 **21.** 15 **22.** 3 **23.** $\frac{2}{3}$ **24.** 20 **25.** 5 **26.** 6,1 ans **27.** 5,8 ans **28.** 9,7 ans **29.** 9,2 ans **30.** $V(t) = 12\,500(0,85)^t$ **31.** 4,3 ans **32.** 13,0 ans

Applications et résolution de problèmes **40. a)** 3 **b)** 4 **c)** 8 **d)** 6 **e)** 2, 4 **f)** $\frac{21}{8}$ **g)** 5 **h)** $\frac{1}{3}$, 27 **41.** La valeur de y à $x = 4$ devrait être de 1. Essaie $x = 1$. **42.** 57 mois **43.** 2 jours **44. a)** 0,81 **b)** 0,65 heure **c)** Il y a 0,41 heure **45. a)** $H(t) = 140(10)^{-0,034t}$ **b)** 95 heures **46. a)** 8,1 jours **b)** 14,3 jours **c)** 2,8 heures **d)** 14,8 heures **47. a)** $P(t) = 0,5^{\frac{t}{28,8}}$ **b)** 95,7 ans **c)** 88,7 % **d)** 57,6 ans **54. a)** 8,2 ans **b)** 35 ans **d)** 22,3 ans **56.** $y = 10^b x^m$ **57.** $b = a^{-2}$ **60.** 512 **61.** $x = \log_2(t \pm \sqrt{t^2 - 1})$ **62. a)** $\frac{1}{25}$ **b)** 1, 2 **63.** $\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$
