3.2 Modéliser des situations à l'aide de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie.

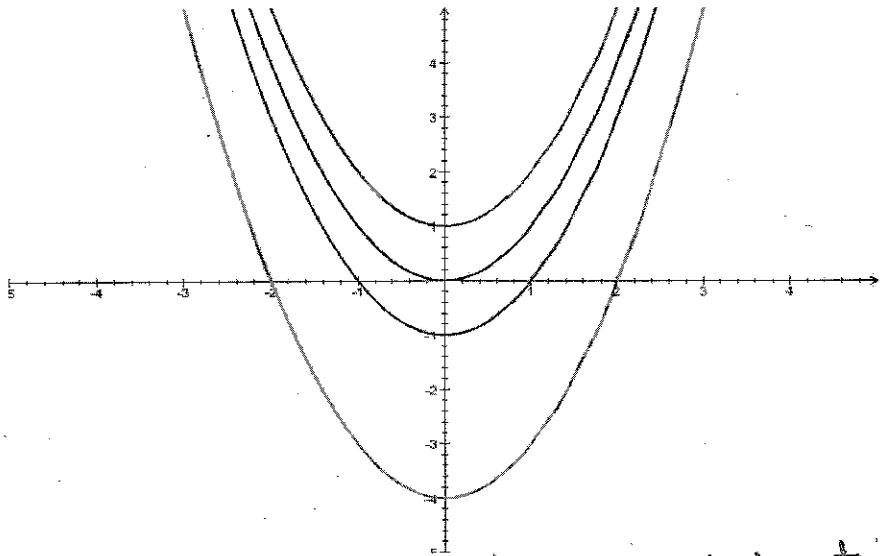
Forme canonique : $y = a(x-h)^2 + k$

La fonction quadratique : un rappel

Paramètre k

Graphiques

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2+2$
3. $f(x) = x^2 -1$
4. $f(x) = x^2 -4$



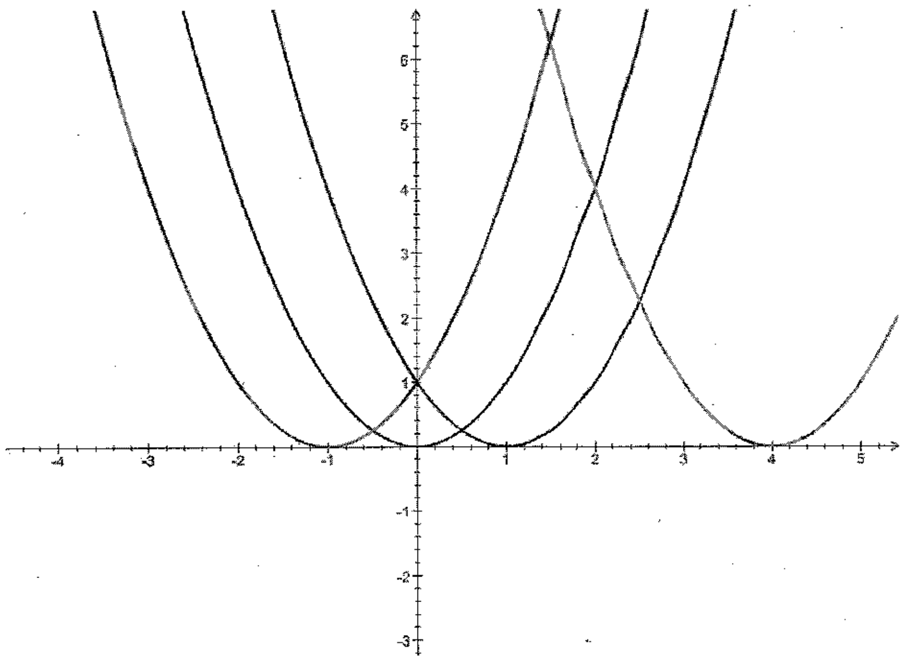
Explique le rôle du paramètre k :

→ Translation verticale → k ⊕ translation vers le haut
→ k ⊖ translation vers le bas

Paramètre h

Graphiques

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = (x+1)^2$
3. $f(x) = (x -1)^2$
4. $f(x) = (x -4)^2$



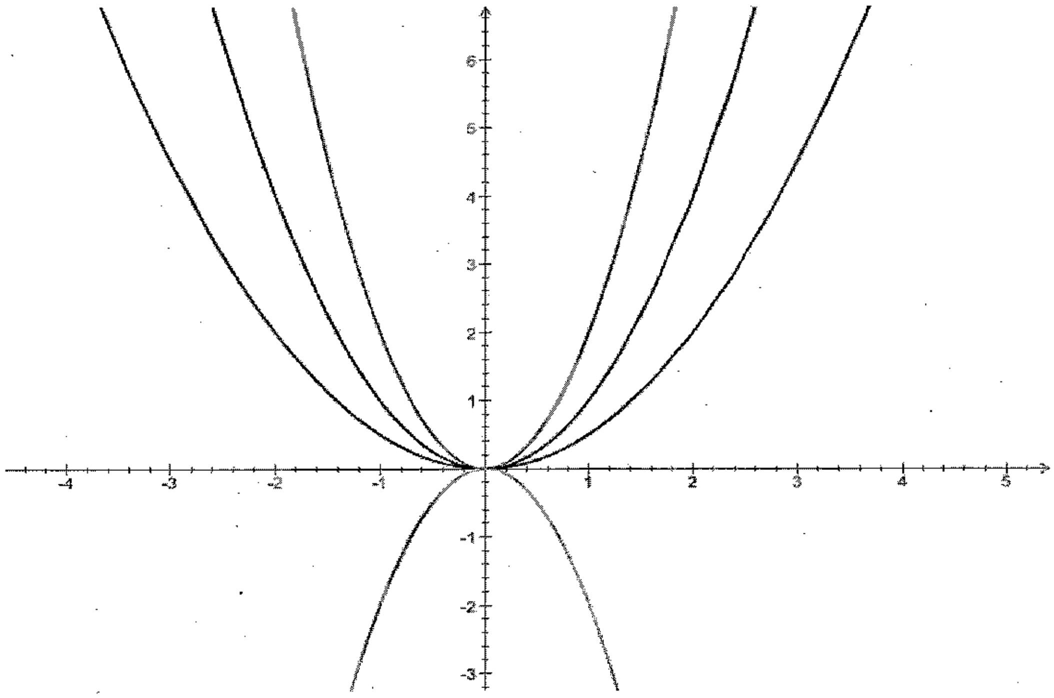
Explique le rôle du paramètre h :

→ Translation verticale → h ⊕ translation vers la droite.
→ h ⊖ translation vers la gauche.

Paramètre a

Graphiques

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 2x^2$
3. $f(x) = 0.5x^2$
4. $f(x) = -2x^2$



Explique le rôle du paramètre a :

- Sens de l'ouverture → a⊕ U ; a⊖ ∩
- Allongissement verticale si $a > 1$ ou $a < -1$
- Rétrécissement verticale si $-1 < a < 1$

Le tableau ci-dessous résume comment on peut obtenir la parabole d'équation $y = a(x-h)^2 + k$ à partir de la fonction $y = x^2$.

$y = x^2$	Le diagramme est une parabole
$y = ax^2$	✓ Réflexion par rapport à l'axe des x si a < 0 ✓ Allongement vertical si a > 1 ou a < -1 ✓ Rétrécissement vertical si -1 < a < 1
$y = a(x-h)^2$	✓ Translation horizontale de h unités vers la droite si h est positif ✓ Translation horizontale de h unités vers la gauche si h est négatif
$y = a(x-h)^2 + k$	✓ Translation verticale de k unités vers le haut si k est positif ✓ Translation verticale de k unités vers le haut si k est positif

Exemple 1 : Trouve l'équation de la parabole qui → $y = a(x-h)^2 + k$
a) a un sommet de (0, -5) et qui passe par (-4,-13)
b) a un sommet de (-5, -3) et qui passe par (-3, -11)
c) est congruente à $y = 4x^2$; maximum sur l'axe des x et axe de symétrie : x = 3

a) $(0,-5)$ et $(-4,-13)$
h k x y

$y = a(x-h)^2 + k$
$-13 = a(-4-0)^2 - 5$
$-13 = 16a - 5$
$-8 = 16a$
$a = \frac{1}{2}$

$\boxed{y = -\frac{1}{2}x^2 - 5}$

b) $(-5,-3)$ et $(-3,-11)$
h k x y

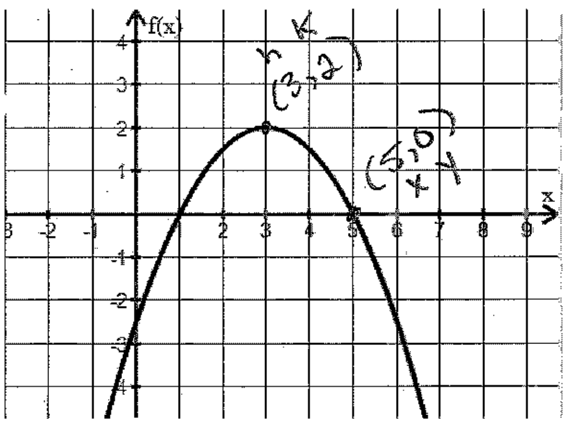
$y = a(x-h)^2 + k$
$-11 = a(-3+5)^2 - 3$
$-11 = a(2)^2 - 3$
$-8 = 4a$
$a = -2$

$\boxed{y = -2(x+5)^2 - 3}$

c) $a = \pm 4$
max sur l'axe des x
$\Rightarrow k = 0$
$a < 0$ ⊖
$a = -4$
Axe symétrie : $x = 3$
$\Rightarrow h = 3$

$\boxed{y = -4(x-3)^2}$

Exemple 2 : Détermine l'équation de la fonction quadratique représentée graphiquement ci-dessous.



$y = a(x-h)^2 + k$
$0 = a(5-3)^2 + 2$
$\frac{-2}{4} = \frac{4a}{4}$
$a = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2}$

Exemple 3 (Parcours C) : Décris les transformations faites à la courbe de $y = x^2$ pour obtenir celle de $y = 2(x+1)^2 - 3$

a ⇒ Allongissement verticale d'un facteur de 2.
h ⇒ Translation horizontale de 1 unité vers la gauche.
k ⇒ Translation verticale de 3 unités vers le bas.

Devoir :

Parcours B : Omnimaths 11 pp. 109-111, nos 19, 50, 56, 60, 63, 64
pp. 118-121, nos 25, 52, 55, 60, 66, 70

Parcours C : Omnimaths 11 pp. 109-111, nos 19, 28*, 30*, 50, 59, 60, 63, 64, 65
pp. 118-121, nos 25, 55, 57,58, 59, 60, 66, 69, 70, 71, 73, 88*
* Pour les numéros suivis d'un astérisque (*), écrire la nouvelle équation en plus de faire ce qui est demandé.

Passage de la forme canonique à la forme générale

Pour passer de la forme canonique de la règle à sa forme générale, il suffit de développer l'expression algébrique qui décrit l'image de x.

Forme canonique : $y = a(x-h)^2 + k$ Forme générale : $y = ax^2 + bx + c$

Ex : Trouve la forme générale de la fonction quadratique suivante : $f(x) = 3(x-2)^2 - 5$.

$f(x) = 3(x-2)(x-2) - 5$

$f(x) = 3(x^2 - 2x - 2x + 4) - 5$

$f(x) = 3x^2 - 12x + 12 - 5$

$\boxed{f(x) = 3x^2 - 12x + 7}$

Passage de la forme générale à la forme canonique

Passer de la forme canonique à la forme générale d'une fonction quadratique est un procédé assez simple. Par contre, pour passer de la forme générale d'une fonction quadratique à la forme canonique, on doit avoir recours à une procédure mathématique appelée complétion du carré.

Explorons les trinômes carrés parfaits.

Un trinôme carré parfait est un trinôme dont la forme factorisée est un binôme au carré. Par exemple, $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. Pour qu'un trinôme de la forme $x^2 + bx + c$ soit un trinôme carré parfait, les valeurs de b et c doivent répondre à une règle particulière.

Trinôme carré parfait	Forme factorisée	Valeur de h dans $(x-h)^2$	Relation entre b et c
$x^2 + 6x + 9$	$(x+3)^2$	-3	$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$
$x^2 - 2x + 1$	$(x-1)^2$	1	$\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$
$x^2 + 8x + 16$	$(x+4)^2$	-4	$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$
$x^2 - 6x + 9$	$(x-3)^2$	3	$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$
$x^2 + 12x + 36$	$(x+6)^2$	-6	$\left(\frac{12}{2}\right)^2 = 36$
$x^2 + 3x + 9/4$	$(x + 3/2)^2$	-3/2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
$x^2 + 24x + 144$	$(x+12)^2$	-12	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 144$

Afin que $x^2 + bx + c$ un trinôme carré parfait, il faut que $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$.

Liste de vérification

Complétion du carré pour transformer l'équation d'une parabole à sa forme canonique (Section 3.5)

forme générale à la forme canonique $y = ax^2+bx+x \longrightarrow y = a(x-p)^2 + q$		✓
Transforme $y = 2x^2 + 20x - 5$ à sa forme canonique.		
Étapes à suivre :	**Modélisation :**	
1. Mettre le facteur «a» en évidence par rapport aux x	$y = 2(x^2 + 10x) \quad - 5$	
2. Diviser par 2 le coefficient du x	$y = 2(x^2 + 10x) \quad - 5$ $10 \div 2 = 5$	
3. l'élever au carré	$y = 2(x^2 + 10x) \quad - 5$ $5^2 = 25$	
4. l'introduire dans l'équation avec ±.	$y = 2(x^2 + 10x + 25 - 25) \quad - 5$	
5. Sortir le 4^e terme de la parenthèse en distribuant le «a»	$y = 2(x^2 + 10x + 25) - 50 \quad - 5$	
6. Factorise le trinôme carré parfait	$y = 2(x + 5)^2 - 50 \quad - 5$	
7. Regroupe les termes constants	$y = 2(x + 5)^2 - 55$	

Exemple 1 : Écris sous forme canonique

a) $y = x^2 + 6x + 8$

$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$

$y = (x^2 + 6x \_\_\_) + 8$

$y = (x^2 + 6x + \underline{9 - 9}) + 8$

$y = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 8$

$\boxed{y = (x+3)^2 - 1}$

b) $y = x^2 - 10x - 8$ (pratique guidée)

$\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$

$y = (x^2 - 10x \quad) - 8$

$y = (x^2 - 10x + \underline{25 \ - 25}) - 8$

$y = (x^2 - 10x + 25) - 25 - 8$

$\boxed{y = (x-5)^2 - 33}$

c) $y = 3x^2 + 12x + 11$

$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

$y = 3(x^2 + 4x \_\_\_) + 11$

$y = 3(x^2 + 4x \underline{+4 - 4}) + 11$

$y = 3(x^2 + 4x + 4) + 11 - 12$

$\boxed{y = 3(x+2)^2 - 1}$

d) $y = 4x^2 - 32x + 3$ (pratique guidée)

$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$

$y = 4(x^2 - 8x \_\_\_) + 3$

$y = 4(x^2 - 8x \underline{+16 - 16}) + 3$

$y = 4(x^2 - 8x + 16) + 3 - 64$

$\boxed{y = 4(x-4)^2 - 61}$

Devoir :

Parcours B et C : Omnimaths 11, p. 131, nos 1, 6, 8, 15, 23, 29, 35, 36, 39, 40, 41, 44, 46

La fonction quadratique : la complétion du carré (suite)

Exemple 1 : Pour chaque fonction quadratique, détermine…

a) Le domaine   b) L'image   c) L'équation de l'axe de symétrie

d) La valeur initiale   e) Les intervalles où la fonction est croissante

f) La valeur maximale ou minimale

I) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 2$

$\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$

$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x \ \_\_\_\_) - 2$

$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x \underline{+1-1}) - 2$

$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - 2 + \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{2}$

a) $x \in \mathbb{R}$

b) $y \in]-\infty, -3/2]$

c) $x = 1$

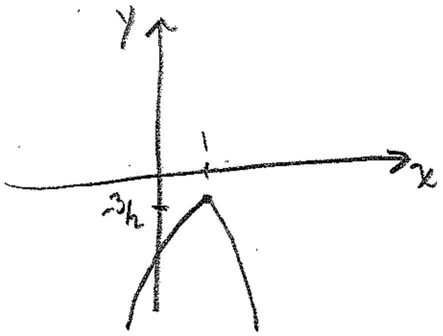
d) $y = -\frac{1}{2}(0-1)^2 - 3/2$

$y = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2}$

$y = -2$

e) $x \in]-\infty, 1]$

f) Max de $-3/2$



II) $y = 2x^2 + 3x - 1$

$\left(\frac{3}{2} \div 2\right)^2$

$\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\right)^2$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$y = 2(x^2 + \frac{3}{2}x \ \_\_\_\_) - 1$

$y = 2(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}) - 1$

$y = 2(x^2 + 3/2x + \frac{9}{16}) - 1 - \frac{18}{16}$

$y = 2(x + 3/4)^2 - \frac{16}{16} - \frac{18}{16}$

$y = 2(x + 3/4)^2 - \frac{34}{16}$

$y = 2(x + 3/4)^2 - \frac{17}{8}$

a) $x \in \mathbb{R}$

b) $y \in [-\frac{17}{8}, \infty[$

c) $x = -3/4$

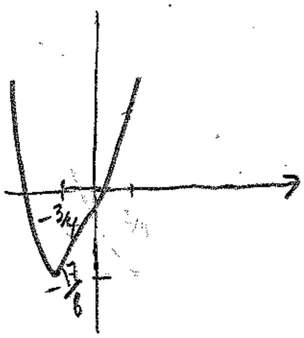
d) $y = 2(0 + 3/4)^2 - \frac{17}{8}$

$y = 2\left(\frac{9}{16}\right) - \frac{34}{16}$

$y = \frac{18}{16} - \frac{34}{16} = \boxed{-1}$

e) $x \in [-3/4, \infty[$

f) Min de $-\frac{17}{8}$



Exemple 2 (Parcours C) : Détermine les coordonnées du sommet de la parabole d'équation

$y = 3 + 5x - 3x^2$.

$$y = -3x^2 + 5x + 3$$
$$y = -3\left(x^2 - \frac{5}{3}x \;\_\_\_\_\right) + 3$$
$$y = -3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} - \frac{25}{36}\right) + 3$$
$$y = -3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) + 3 + \frac{75}{36}$$
$$y = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{108}{36} + \frac{75}{36}$$
$$y = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{183}{36}$$
$$y = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{61}{12}$$

$$\left(\frac{5}{3} \div 2\right)^2$$
$$\left(\frac{5}{3} \times \frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

Sommet : $\left(\frac{5}{6}, \frac{61}{12}\right)$

Devoir :

Parcours B : OMNIMATHS 11, pp. 131-134, nos 52, 54, 58, 61, 63, 64, 70b, 76,

Parcours C : OMNIMATHS 11, pp. 131-134, nos 54, 55, 60, 61, 66, 67, 70cf, 76

La fonction quadratique : la complétion du carré et ses applications

Exemple 1 :

Trouve deux nombres dont la différence est 8 et dont le produit est un minimum.

x : 1e nombre

y : 2e nombre

$$y - x = 8$$
$$y = x + 8$$

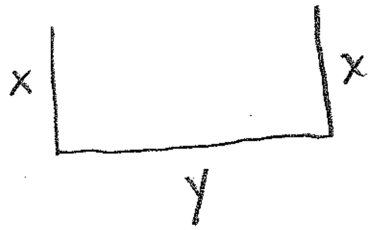
$$P = xy$$
$$P = x(x+8)$$
$$P = x^2 + 8x$$
$$P = (x^2 + 8x + 16) - 16$$
$$P = (x+4)^2 - 16$$
$$x = -4, \quad y = -4 + 8, \quad y = 4$$

x	y	Produit
10	2	20
9	1	9
8	0	0
6	-2	-12
5	-3	-15
4	-4	-16
3	-5	-15
2	-6	-12
x	$(x-8)$	

Les deux nombres sont 4 et -4

Exemple 2 :

Jacques dispose de 32 m de bordure pour mettre dans un salon. En sachant qu'un des côtés de son salon n'a par de mur, quelle est l'aire maximale du salon ?



$$2x + y = 32 \Rightarrow y = 32 - 2x$$

$$A = xy$$
$$A = x(32-2x)$$
$$A = -2x^2 + 32x$$
$$A = -2(x^2 - 16x \underline{+64-64})$$
$$A = -2(x^2-16x+64)+128$$
$$A = -2(x-8)^2+128$$

L'aire maximale sera de 128 m^2

Exemple 3 :

Une troupe de théâtre a présentement 300 abonnés. Le conseil d'administration décide d'augmenter le prix de l'abonnement, qui est actuellement de 400$. D'après un sondage réalisé auprès des abonnés, pour chaque tranche d'augmentation de 20 $, 10 abonnés ne renouvelleront pas leur abonnement. Quel nouveau prix permettrait de maximiser les revenus générés par les abonnements ?

x : nombre d'augmentation de 20 $

$$R(x) = \underbrace{(300-10x)}_{\text{abonnés}}\underbrace{(400+20x)}_{\text{prix}}$$
$$R(x) = 120000 + 6000x - 4000x - 200x^2$$
$$R(x) = -200x^2 + 2000x + 120000$$
$$R(x) = -200(x^2 - 10x \quad) + 120000$$
$$R(x) = -200(x^2 - 10x \underline{+25-25}) + 120000$$
$$R(x) = -200(x^2-10x+25)+120000+5000$$
$$R(x) = -200(x-5)^2+125000$$

$x = 5$
↳ Prix $= 400 + 20(5)$
$= \boxed{500\$}$

	abonnés	Prix	Revenus
	300	400	120 000
$x=1$	300 − 10	400 + 20	121 800
$x=2$	300 − 20	400 + 40	123 200
$x=3$	300 − 30	400 + 60	124 200
$x=4$	300 − 40	400 + 80	124 800
$x=5$	300 − 50	400 + 100	125 000
$x=6$	300 − 60	400 + 120	124 800
$x=7$	300 − 70	400 + 140	124 200
	(300 − 10x)	(400 + 20x)	

Devoir :

Parcours B : OMNIMATHS 11, pp. 120-121, nos 78abcd, 80
pp. 131-134, nos 76, 77, 79, 81, 83, 84, 85, 87a
p. 137, nos 1, 4ac

Parcours C : OMNIMATHS 11, pp. 120-121, nos 78abcdef, 80
pp. 131-134, nos 76, 77, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87a, 88, 90
p. 137, nos 2ab, 3, 4ac