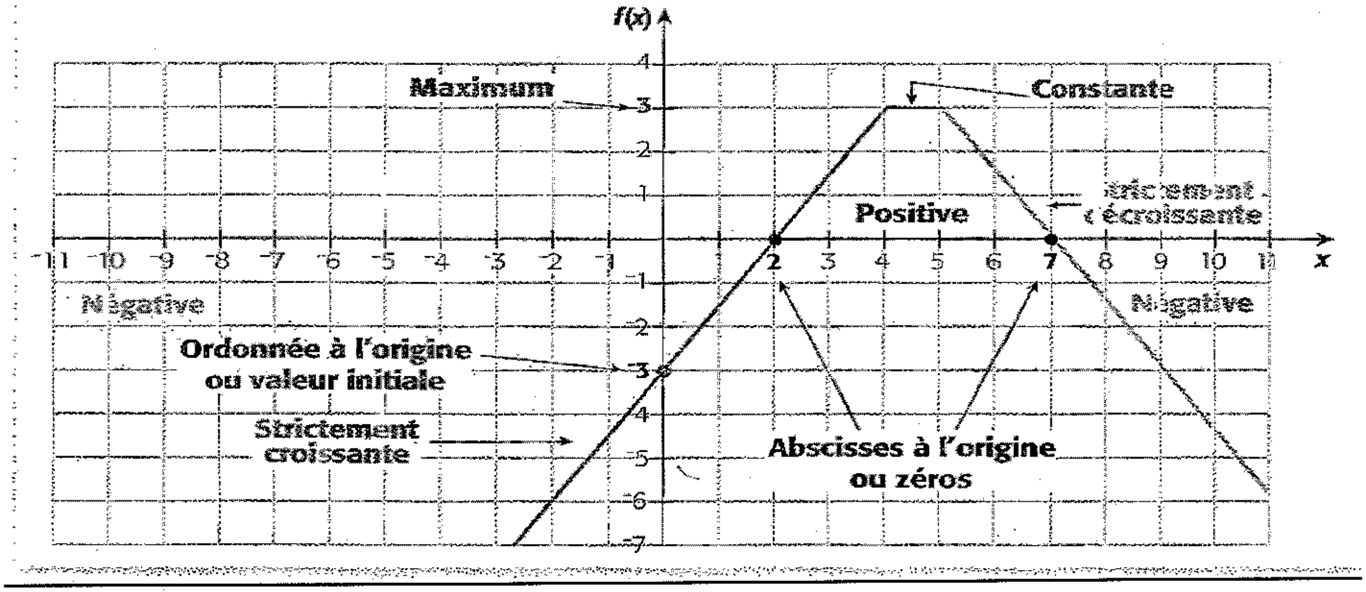
3.1 Analyser diverses propriétés de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie.

Les propriétés d'une fonction

Faire l'analyse d'une fonction consiste à décrire ses propriétés.
Soit la représentation graphique de la fonction *f* ci-dessous.



Remplissez le tableau suivant à l'aide du graphique de la fonction.

Propriétés		Graphique
Domaine		$x \in \mathbb{R}$
Image		$\{y \in \mathbb{R} \,/\, y \leq 3\}$
Ordonnée à l'origine		$y = -3$
Racine(s) ou zéros		$x = 2$ et $x = 7$
Maximum (absolue)		3
Minimum (absolue)		$\varnothing$
Signe	Positif	$x \in [2, 7]$
	Négatif	$x \in]-\infty, 2] \cup [7, \infty[$
Variation	Croissante	$x \in]-\infty, 5]$
	Décroissante	$x \in [4, \infty[$

*** **Signe <u>strictement</u> positif et négatif / Variation <u>strictement</u> croissante et décroissante.**

Glossaire : Propriétés d'une fonction

Fonction : Une fonction est une relation qui associe les éléments d'un ensemble de départ (le domaine) à un ensemble d'arrivée (l'image). On peut représenter graphiquement la fonction d'une variable réelle dans un plan cartésien.

Domaine : Le domaine de définition d'une fonction f, noté D_f, est l'ensemble des éléments qui possèdent une image. Autrement dit, il s'agit de l'ensemble des x pour lesquels f(x) existe. La variable présentée par le domaine est la variable indépendante.

Image : L'image d'une fonction f, noté I_f, est l'ensemble des résultats possibles pour toutes les valeurs du domaine. Autrement dit, il s'agit de l'ensemble de tous les f(x). La variable présentée par l'image est la variable dépendante.

Valeur initiale : La valeur initiale est f(0). Elle est aussi appelée ordonnée à l'origine. Graphiquement, il s'agit de la valeur de 'y' lorsque la courbe coupe l'axe des ordonnées. La valeur initiale d'une fonction, si elle existe, est unique.

Zéros : Les zéros d'une fonction sont les solutions de l'équation f(x) = 0. Ils portent aussi le nom de racines ou d'abscisses à l'origine. Graphiquement, il s'agit des valeurs de 'x' lorsque la courbe coupe l'axe des abscisses. Il n'y a pas de restrictions quant au nombre de zéros qu'une fonction peut posséder.

Extrémum relatif : Sur un intervalle $[a,b]$, f(c) est un maximum relatif si f(c) > f(x) quel que soit x dans l'intervalle $[a,b]$ ($x \neq c$). Sur un intervalle $[a,b]$, f(c) est un minimum relatif si f(c) < f(x) quel que soit x dans l'intervalle $[a,b]$ ($x \neq c$).

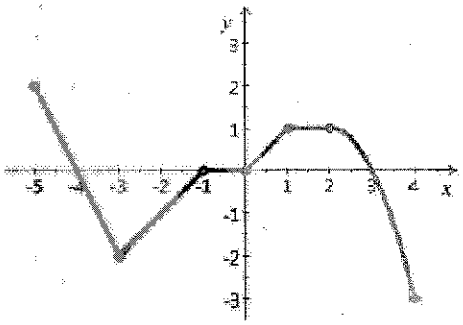
Extrémum absolu : Pour une fonction f, f(c) est un maximum absolu si f(c) > f(x) quel que soit x choisi dans D_f ($x \neq c$). Pour une fonction f, f(c) est un minimum absolu si f(c) < f(x) quel que soit x choisi dans D_f ($x \neq c$).

Équation de l'axe de symétrie : Équation de la droite qui définit la symétrie d'une courbe d'une fonction, c'est-à-dire qu'après pliage le long de cette droite, les deux moitiés se superposent.
Sommet d'une fonction: Point de la représentation graphique de la fonction qui, s'il existe, est un extrémum absolu situé sur l'axe de symétrie.

Signe d'une fonction : Le signe d'une fonction indique sur quels intervalles du domaine l'image est soit positive ou négative. Les figures ci-dessous apportent plus de précisions.

Positive	Une fonction f est dite positive sur un intervalle donné du domaine si, pour toutes les valeurs de cet intervalle, $f(x) \geq 0$.
Strictement positive	Une fonction f est dite strictement positive sur un intervalle donné du domaine si, pour toutes les valeurs de cet intervalle, $f(x) > 0$.
Négative	Une fonction f est dite négative sur un intervalle donné du domaine si, pour toutes les valeurs de cet intervalle, $f(x) \leq 0$.
Strictement négative	Une fonction f est dite strictement négative sur un intervalle donné du domaine si, pour toutes les valeurs de cet intervalle, $f(x) < 0$.

Par exemple, soit $y = f(x)$ une fonction par partie représentée par le graphe suivant :



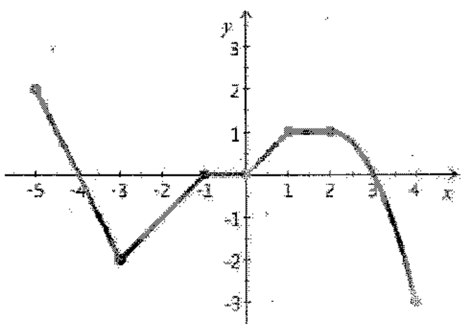
La fonction f est positive sur l'intervalle $[-5,-4] \cup [-1,3]$.
La fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[-5,-4[\cup]0,3[$.
La fonction f est négative sur l'intervalle $[-4,0] \cup [3,4]$.
La fonction f est strictement négative sur l'intervalle $]-4,-1[\cup]3,4]$.

Variation d'une fonction : La variation d'une fonction indique sur quels intervalles la fonction est croissante ou décroissante. Les figures ci-dessous apportent plus de précision.

Variation d'une fonction :

Croissante	Une fonction f est dite croissante sur l'intervalle $[a,b]$ du domaine si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 de cet intervalle, $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Strictement croissante	Une fonction f est dite strictement croissante sur l'intervalle $[a,b]$ du domaine si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 de cet intervalle, $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$.
Décroissante	Une fonction f est dite décroissante sur l'intervalle $[a,b]$ du domaine si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 de cet intervalle, $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Strictement décroissante	Une fonction f est dite strictement décroissante sur l'intervalle $[a,b]$ du domaine si, pour toutes les valeurs x_1 et x_2 de cet intervalle, $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.

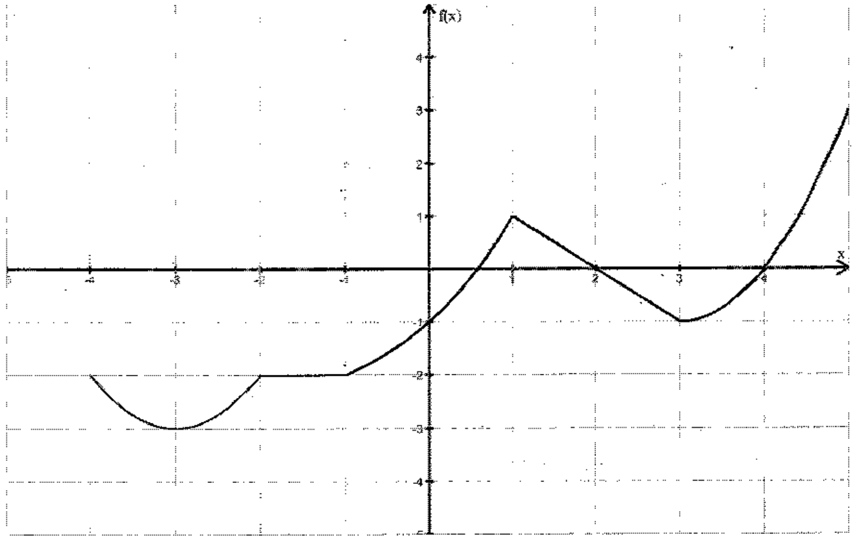
Par exemple, soit $y = f(x)$ une fonction par partie représentée par le graphe suivant :



La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-3,2]$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-3,-1] \cup [0,1]$.
La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-5,-3] \cup [-1,0] \cup [1,4]$.
La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5,-3] \cup [2,4]$.

À toi de jouer!

Exemple 1 : Soit la représentation du graphique de la fonction f ci-dessous. Détermine...



a) D_f $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$

b) I_f $\{y \in \mathbb{R} / y \geq -3\}$

c) Les zéros de f $x = 0{,}5$; $x = 2$ et $x = 4$

d) La valeur initiale de f -1

e) Les maximums relatifs de f 1

f) Le minimum absolu de f -3

g) Les intervalles où f est croissante $x \in [-3, 1] \cup [3, \infty[$

h) Les intervalles où f est strictement décroissante $x \in [-4, -3] \cup [1, 3]$

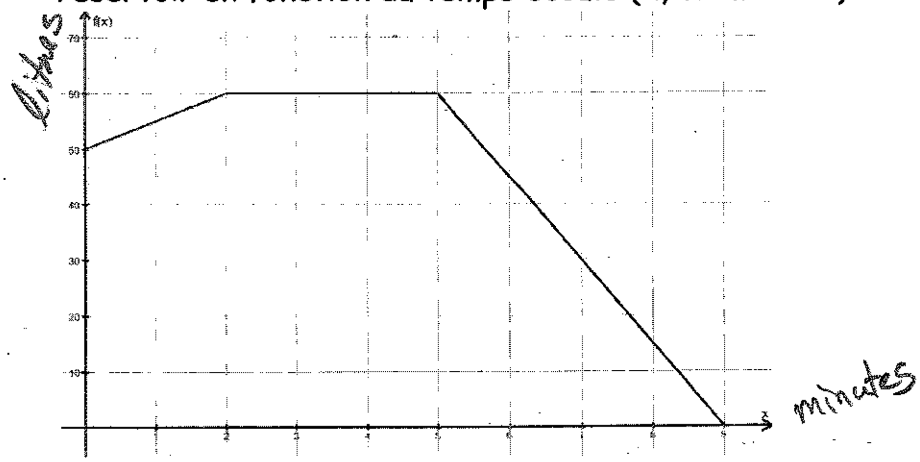
i) Les intervalles où f est positive $x \in [0{,}5, 2] \cup [4, \infty[$

j) Les intervalles où f est strictement négative $x \in [-4, 0{,}5[\cup]2, 4[$

k) Explique pourquoi f n'a pas de maximum absolu.

Parce que l'image de la fonction continue jusqu'à ∞.

Exemple 2 : Un employé de la ville doit vider un réservoir. Pour ce faire, il doit y ajouter un certain liquide afin de créer une réaction chimique. La quantité de liquide ($f(x)$, en litres) du réservoir en fonction du temps écoulé (x, en minutes) est représenté dans le graphique suivant.



a) Selon le contexte, que représente le domaine de la fonction?

Représente le temps écoulé en minutes pour vider un réservoir.

b) Selon le contexte, que représente l'intervalle où la fonction est strictement croissante?

Lorsque l'employé ajoute un certain liquide afin de créer une réaction chimique.

c) Selon le contexte, interprète la valeur initiale de cette fonction.

Avant de vider le réservoir, il y avait 50 Litres de liquide au départ.

d) Selon le contexte, interprète le zéro de cette fonction.

9 minutes s'est écoulées afin de vider le réservoir.

e) Pendant combien de temps l'employé a-t-il laissé réagir le produit ?

L'employé a laissé réagir le produit pendant 3 minutes.

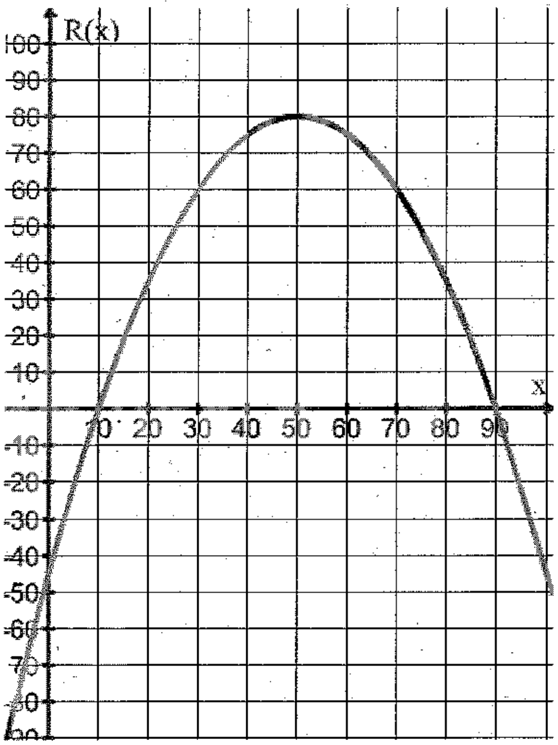
f) Que s'est-il passé 5 minutes après le début de l'opération ?

Il y a eu une réaction chimique entre les deux liquide qui a permis de vider le réservoir.

Devoir : Visions, pages 8 et 9, nos 1 et 2 et feuille de travail RAS 3.1

Mise en situation: Les propriétés de la fonction quadratique

riane organise une pièce de théâtre intitulée 'Rivière Chocolat'. Elle a fait une étude de marché et les résultats du profit (en centaine de $), *R(x)*, en fonction du prix de vente (en $), *x*, sont présentés dans le graphique ci-dessous.



a) Quel est le profit maximal qu'Ariane peut espérer obtenir ?

8000 $

b) Quel prix de billet maximise les profits ?

50 $

c) Quelle trame de prix doit-elle exiger afin de ne pas réaliser de perte ?

[10 , 90]

d) Quel doit être le coût d'un billet afin qu'elle réalise un profit de 6 000$?

30$ et 70$

e) Détermine, à 500$ près, le profit réalisé lorsque le prix de vente du billet est de 60$.

7500 $

f) Quels sont les seuils de rentabilité par rapport du prix du billet ?

10$ et 90$

g) Quels sont les frais fixes, à 500$ près, associés à la présentation de la pièce de théâtre ?

4500$

h) D'après le graphique, sur quel intervalle de prix les revenus augmentent-ils en fonction du prix du billet?

]0 , 50]

Rappel : Représentation graphique d'une fonction quadratique à partir de sa règle sous forme canonique

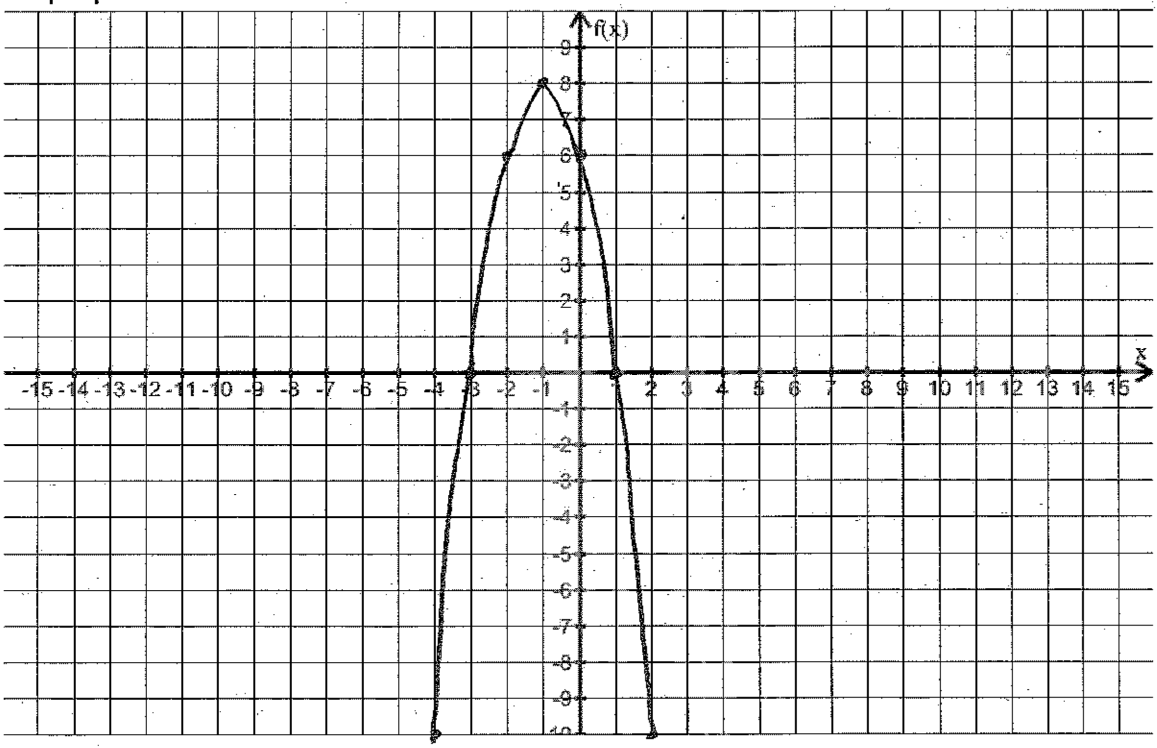
Forme canonique de la fonction quadratique : $f(x) = a(x-h)^2 + k$

La représentation graphique d'une fonction quadratique est une parabole. Son sommet est situé au point (h,k). Afin de déterminer les autres points de la parabole, on peut faire le produit des nombres carrés par le paramètre 'a' dans le but de trouver la variation selon les abscisses et les ordonnées. En d'autres mots,

Δx	Δf(x)
1	1 x a
2	4 x a
3	9 x a

x	y
1	0
0	6
-1	8
-2	6
-3	0

Exemple : Dans le repère ci-dessous, trace la fonction f(x)= $-2(x+1)^2+8$. Indique ensuite les propriétés énumérées ci-bas.



a) Le domaine
$x \in \mathbb{R}$

b) L'image
$y \in \left]-\infty, 8\right]$

c) L'équation de l'axe de symétrie
$x = -1$

d) Les zéros
-3 et 1

e) La valeur initiale
6

f) Les intervalles où la fonction est croissante
$x \in \left]-\infty, -1\right]$

g) Les intervalles où la fonction est strictement positive
$x \in \left]-3, 1\right[$

h) Les intervalles où la fonction est négative
$x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[1, \infty\right[$

i) La valeur maximale ou minimale
Max de 8

j) f(3)
-24

k) f(-5)
-24

Devoir : Feuille de travail B